Aux 9
—— a ——

P1] Calcule el plano tangente de las siguientes conicas en ~~los~~ el punto ~~s~~ (x_0, y_0) solo en función de las variables (x, y) no de (x, y, z)

a) $x^2 + y^2 = R^2$

Sol,

sea $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\Rightarrow \quad f(x_0, y_0) = R^2$ así

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$Z = R^2 + \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$= R^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

$$= R^2 + 2x_0 x - 2x_0^2 + 2y_0 y - 2y_0^2$$

$$= R^2 - 2\underbrace{[x_0^2 + y_0^2]}_{R^2} + 2x_0 x + 2y_0 y$$

$$= R^2 - 2R^2 + 2x_0 x + 2y_0 y$$

$$\boxed{Z = -R^2 + 2x_0 x + 2y_0 y}$$

ahora para eliminar la dependencia de Z

notamos que $f(x,y)=R^2$ $\forall (x,y) \in Dom f$

así $g(x,y)=R^2$ genera el

mismo plano tangente

$$z = g(x_0,y_0) + \cancel{\nabla g(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= R^2$$

así

$$R^2 = z = -R^2 + 2x_0x + 2y_0y$$

$$\rightarrow \quad 2x_0x + 2y_0y = 2R^2$$

$$\rightarrow \quad \boxed{x_0x + y_0y = R^2}$$

b)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sol)

Sea $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$g(x,y) = 1$$

$$\Rightarrow Z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= g(x_0,y_0) + \nabla g(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Z = \overset{1}{g(x_0,y_0)} + \overset{0}{\cancel{\nabla g(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}}$$

$$= 1$$

$$\therefore \; 1 = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{a^2} \\ \frac{2y_0}{b^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2}}$$

(x_0, y_0) pertenece a la elipse //

c) $$\frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

Sol //

Sea $$f(x,y) = \frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{(y-b)^2}{b^2}$$

Y $g(x,y)=1$

asi $z = g(x_0,y_0) + \cancelto{0}{\nabla g(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}$

$= 1$

$\Rightarrow 1 = z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2(x-a)}{a^2} \\ \dfrac{-2(y-b)}{b^2} \end{pmatrix}$$

$$1 = 1 + \begin{pmatrix} \dfrac{2(x_0-a)}{a^2} \\ \dfrac{-2(y_0-b)}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 0 = \frac{2(x_0-a)}{a^2}(x-x_0) - \frac{2(y_0-b)}{b^2}(y-y_0)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{0 = \frac{(x_0 - a)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(y_0 - b)(y - y_0)}{b^2}}$$

P2] a) Muestre que la ecuación del plano Tangente a la elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ en el}$$

punto (x_0, y_0, z_0) puede escribirse como:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} + \frac{z \cdot z_0}{c^2} = 1$$

Sol,

sea $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

$g(x,y,z) = 1$

Scanned by CamScanner

as i

$$W = f(x_0,y_0,z_0) + \nabla f(x_0,y_0,z_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

$$= g(x_0,y_0,z_0) + \nabla g(x_0,y_0,z_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{g(x_0,y_0,z_0)}^{1} + \underbrace{\cancel{\nabla g(x_0,y_0,z_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}}}_{0}$$

$$\Rightarrow W = 1$$

$$1 = 1 + \nabla f(x_0,y_0,z_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{a^2} \\ \frac{2y_0}{b^2} \\ \frac{2z_0}{c^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{x_0}{a^2}x - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - \frac{z_0^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}$$

$$= 1$$

b)

Encuentre todos los puntos de la elipsoide anterior para los cuales el plano tangente forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje OZ

Sol) en $\mathbb{R}^n$ $\overrightarrow{OZ}$ puede representarse por $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a su vez

Si $(x, y, z) \in$ Plano tangente

$$\Rightarrow \frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y + \frac{z_0}{c^2} z = 1$$

donde (x_0, y_0, z_0) es el punto de tangencia así recordamos

$$Ax + BY + CZ = D$$

$$\Rightarrow n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$ donde n

es el vector normal al plano

$$\text{así } n = \begin{pmatrix} x_0/a^2 \\ y_0/b^2 \\ z_0/c^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\begin{pmatrix} x_0/a^2 \\ y_0/b^2 \\ z_0/c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x_0/a^2 \\ y_0/b^2 \\ z_0/c^2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}$$

Scanned by CamScanner

lo anterior debido a:

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \cos(\alpha) = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$

donde (α) es el angulo entre ellos

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \left\| \begin{pmatrix} \frac{x_0}{a^2} \\ \frac{y_0}{b^2} \\ \frac{z_0}{c^2} \end{pmatrix} \right\| = \frac{z_0}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} \right) = \frac{z_0^2}{c^4}$$

$\downarrow$

elevando al cuadrado

así

$$\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} = 2\frac{z_0^2}{c^4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z_0^2}{c^4} = \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \quad (*)$$

Son todos los puntos que cumplen siempre esta

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

obs) $(*)$ es un cono

Scanned by CamScanner

P3

Supongamos que estamos sobre el punto $(-1,5,8)$ en un ~~centro~~ cerro cuya superficie está dada por la ecuación

$$74 - x^2 - 7xy - 4y^2 - z = 0$$

El eje 'Y' apunta hacia el norte y el eje 'X' hacia el este la distancias se miden en metros

a) si nos movemos al sur ¿subimos o bajamos? ¿con que rapidez?

Sol

observamos que el eje 'z' es la altura así

$z = f(x,y)$ es t.q

$$f(x,y) = 74 - x^2 - 7xy - 4y^2$$

entonces

$\frac{\partial f}{\partial y}$ nos da información sobre el movimiento en 'y'

$$\to \frac{\partial f}{\partial y} = -7x - 8y$$

moverse al sur significa x cte 'y' creciendo

$\frac{\partial f}{\partial y}$ es decreciente para 'y'

$\therefore$ bajariamos

la rapidez es $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ entonces

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |-7x - 8y|$

ahora 'x' cte $\therefore$ $x = -1$

asi $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |7 - 8y|$ $\therefore$ depende

del valor de y cuanto rapido.

~~b) el decenso mas~~

ahora si justo nos empezamos a

mover $y = 5$

$\to \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |7 - 8 \cdot 5| = |7 - 40| = 33$

b) ¿dirección de decenso más rapido?

Sol,

el vectordirección de maximo crecimiento

$$V_x = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x-7y \\ -7x-8y \end{pmatrix}$$

así $\nabla f(-1,5) = \begin{pmatrix} 2-7\cdot5 \\ 7-8\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow V_* = \frac{\begin{pmatrix} -33 \\ -33 \end{pmatrix}}{\sqrt{(33)^2+(33)^2}}$$

$$= \frac{1}{33\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore V_* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es el vector

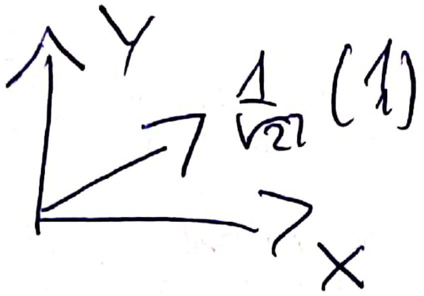
de maximo crecimiento

$\Rightarrow -V_* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es el ~~vector~~

vector de maximo

decenso

Y $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ apunta en la dirección norte-este //



c)

que no hayan decenso es equivalente a que

$\nabla f(x)\cdot v = 0$ es decir no existan cambios al moverme en esa dirección ya que

$$\underbrace{Df(x;v)}_{\text{derivada direccional}} = \nabla f(x)\cdot v$$

Y como estamos en $(-1, 5, 8)$

$$\Rightarrow \nabla f(-1,5) = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \end{pmatrix} \cdot V = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -33 v_0 - 33 v_1 = 0$$

$$\Rightarrow -V_1 = +v_0$$

$\therefore$ para $V = v_0 \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$

no hay ni ascenso ni decenso

Scanned by CamScanner

d) encuentre el punto de altura maxima y determinela (en caso de existir)

Sol,

Como $F(x,y)$ es la función de altura buscamos candidatos

$F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ $\therefore$

Si $\vec{x}_0$ es minimo $\nabla F(\vec{x}_0)=0$

asi

$$\nabla F(x,y)=\begin{pmatrix}-2x-7y\\-7x-8y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}-2x-7y&=0\\-7x-8y&=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $-2 \cdot -8 - (-7 \cdot -7)$

$= +16 - 49 \neq 0$

la solución al sistema es única $\therefore$ $(x,y) = (0,0)$

soluciona

Para ver ~~que~~ si es maximo

calculamos $Hf(0,0)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - 7y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -8y - 7x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -7$$

$$\Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$$

Calculamos us

calculamos sus V.P.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -7 \\ -7 & -8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(-8-\lambda) - 49$$

$$= \lambda^2 + 10\lambda + 16 - 49$$

$$= \lambda^2 + 10\lambda - 33$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 33}}{2}$$

así notamos $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$\therefore$ el punto encontrado es silla. así para encontrar el maximo o mostrar que no existe hay que usar $z \geq 0$

$$\rightarrow 74 \geq x^2 + 7xy + 4y^2$$

en efecto si $x = -y$

$$\rightarrow 74 \geq x^2 - 7x^2 + 4x^2$$
$$= -2x^2 \quad \therefore \text{si } x \rightarrow +\infty$$

$$74 \geq -\infty$$

asi $f(x,-x) \rightarrow +\infty \therefore$ no hay maximo //

Pregunta:

una direccion de ~~ascenso~~

no ascenso ni decenso

era $V_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ si $V_0 = 1$

Scanned by CamScanner

tenemos $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ no es de ascenso ni decenso

¿ quepaso ?

Respuesta

no es deaseenso ni decenso del punto (-1, 5) pero

$(x, -x)$ no pasa por (-1, 5) //

P4) Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función t.q

$$\Delta f(x) = -1, \quad \forall x \in D$$

donde

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

pdq f no puede tener mínimo local

Sol) si lo tuviera, x_0, por criterio de segundo orden

$x^t Hf(x_0)\, x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

en particular $x = e_i$ con i fijo

$\rightarrow \quad e_i^t Hf(x_0) e_i \geq 0$

notemos que

$$e_i^t Hf(x_0) e_i = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i^2} \geq 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta f(x_0) \geq 0$$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow -1 \geq 0 \rightarrow \in$

$\therefore$ no tiene minima local //

P5) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x,y) = x^2 + \cos(x) + y^2 - y$$

a) Encuentre y estudie la naturaleza de los puntos críticos

Sol) $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - \operatorname{sen}(x) \\ 2y - 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow 2x = \operatorname{sen}(x)$$

$$2y = 1 \to y = 1$$

ahora hay que ver cuando $2x = \operatorname{sen}(x)$

analizamos

$\tilde{f}(x) = 2x - \operatorname{sen}(x)$

$\tilde{f}'(x) = 2 - \operatorname{sen}(x) \therefore \tilde{f}' > 0 \ \forall x$

así $\tilde{f}$ es estrictamente creciente $\therefore \exists! \ \bar{x}$ t.q $\tilde{f}(\bar{x}) = 0$

notamos que $\tilde{f}(0) = 0$

$\therefore x = 0$ es el punto buscado

así el unico punto ~~de~~ critico de f es $(0, 1/2)$

Scanned by CamScanner

Para ver su naturaleza estudiamos $Hf(0, 1/2)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \operatorname{sen}(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - \cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

así

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2-\cos(x) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

veamos

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)$$

así $\lambda = 1$, $\lambda = 2$

$\therefore$ Hf es def. positiva

así $(0, 1/2)$ es mínimo

Scanned by CamScanner

P6 Suponga que tiene n puntos del plano $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ como resultados de algún experimento. El objetivo de este problema es encontrar la función afín que se ajuste lo mejor posible a los datos, es decir encontrar $m, b \in \mathbb{R}$ t.q la función $y = mx + b$ se ajuste mejor a los puntos. Como los puntos no necesariamente están en una recta, para cada par de puntos existe un error asociado

$$e_i = y_i - (mx_i + b) \quad \forall i$$

Una manera de determinar m, b es con el metodo de los minimos cuadrados que se expresa como:

$$\min \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

El problema anterior es equivalente a resolver

$$\min \sum_{i=1}^{n} (y_i - (m x_i + b))^2$$

a) Resuelva el segundo problema (asumiendo todo lo necesario para que el minimo exista)

Sol)

definimos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$f(m,b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (mx_i + b))^2$$

asi $f \in C^\infty$ $\therefore$ para obtener

$$\min \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (mx_i + b))^2 \Leftrightarrow \min f$$

basta buscar $\nabla f = 0$

asi
$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (mx_i + b))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial m} (Y_i - (mx_i + b))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - (mx_i + b)) \cdot -x_i$$

Scanned by CamScanner

de esto

$$\frac{\partial f}{\partial m} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - (m x_i + b))$$

analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (m x_i + b))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -2 (y_i - (m x_i + b))$$

$$\therefore \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial m} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - (m x_i + b)) = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - (m x_i + b)) = 0$$

Scanned by CamScanner

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} [x_i y_i - m x_i^2 - b x_i] = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - m x_i - b] = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} m x_i + \sum_{i=1}^{n} b = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad (1)$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} m x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} m x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

notación

en metodos experimentales

Se usa la siguiente notación [la cual usaremos]

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \,, \quad \langle y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

↳ Promedio

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,, \quad \langle y^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

↳ Promedio cuadratico

$$\langle xy \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \rightarrow \text{Promedio multp.}$$

así el sistema queda:

$$m \cdot \langle x \rangle n + bn = \langle y \rangle n$$

$$m \cdot \langle x^2 \rangle n + b \cdot \langle x \rangle n = \langle xy \rangle \cdot n$$

$$\Rightarrow m\langle x\rangle + b = \langle y\rangle$$

$$m\langle x^2\rangle + b\langle x\rangle = \langle xy\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \langle x\rangle & 1 \\ \langle x^2\rangle & \langle x\rangle \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y\rangle \\ \langle xy\rangle \end{pmatrix}$$

Si $A = \begin{bmatrix} \langle x\rangle & 1 \\ \langle x^2\rangle & \langle x\rangle \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \langle y\rangle \\ \langle xy\rangle \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(\langle x\rangle)^2 - \langle x^2\rangle} \begin{bmatrix} \langle x\rangle & -1 \\ -\langle x^2\rangle & \langle x\rangle \end{bmatrix}$$

asi

$$\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{(\langle x\rangle)^2 - \langle x^2\rangle} \begin{bmatrix} \langle x\rangle & -1 \\ -\langle x^2\rangle & \langle x\rangle \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \langle y\rangle \\ \langle xy\rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{(\langle x\rangle)^2 - \langle x^2\rangle} \begin{bmatrix} \langle x\rangle\langle y\rangle - \langle xy\rangle \\ \langle x\rangle\langle xy\rangle - \langle x^2\rangle\langle y\rangle \end{bmatrix}$$

asi

$$m = \frac{\langle x\rangle \cdot \langle y\rangle - \langle xy\rangle}{(\langle x\rangle)^2 - \langle x^2\rangle}$$

$$b = \frac{\langle x\rangle\langle xy\rangle - \langle x^2\rangle\langle y\rangle}{(\langle x\rangle)^2 - \langle x^2\rangle}$$

//

b) Pruebe que el resultado encontrado, efectivamente, es mínimo

Sol)

calculamos HF

Sabemos

$$\frac{\partial f}{\partial m} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i-(mx_i+b))$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= -2n\langle xy\rangle + 2m\langle x^2\rangle n + 2nb\langle x\rangle$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} = 2\langle x^2\rangle n$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial m} = +2n\langle x\rangle$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} y_i - (mx_i + b)$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot m - 2bn$$

$$= -2n\langle y\rangle + 2n\langle x\rangle m - 2bn$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = -2n$$

$$\therefore Hf = \begin{pmatrix} 2\langle x^2\rangle n & +2n\langle x\rangle \\ +2n\langle x\rangle & -2n \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix}$$

$H_f = 2A$ ∴ mostrar que

A es semi-def positiva $\Leftrightarrow$

aprobar que H_f lo es ya que

$2 > 0$

Obs: Para matrices de

2x2 una forma de ver

si es semi-def. si para

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $|A| \geq 0$

$tr(A) \geq 0$

dehecho setiene lo siguiente:

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- $|A| < 0$ A no es ni semi-def negativa ni semi-def positiva
- $|A| = 0$
  - $Tr(A) = a + d > 0$, A es semi-def positiva
  - $Tr(A) = a + d < 0$, A es semi def negativa
- $|A| > 0$
  - $Tr(A) = a + d > 0$, A es def positiva
  - $Tr(A) = a + d < 0$, A es def negativa

asi claramente

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n > 0$$

$\therefore$ basta ver

$|A|$

$$|A| = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

- recordamos que: existe la desigualdad C-S que dice

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n}} x_i$$

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

$\Rightarrow (\langle u,v \rangle)^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$

identificamos

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle u,v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_1^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_1^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$= |A|$$

así $|A| \geq 0 \wedge tr(A) > 0$

$\therefore$ A es semidef positiva

c)

Para que exista todo lo que hicimos tiene que ocurrir que:

$$(\langle x\rangle)^2 - \langle x^2\rangle \neq 0$$

ya que dividimos por esto.

es decir

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

ahora notamos que si

$$(\langle x \rangle)^2 - \langle x^2 \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ que

$$(\langle u, v \rangle)^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

con $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.q

$\Rightarrow u = \alpha v$

$\hookrightarrow$ propiedad de C-S

es decir el problema

tiene solución si los x_i son distintos. en caso contrario no podemos asegurar.