Auxiliar 7

$f(\overline{x}) = \overline{x}$

Profesor: Ángel Pardo
Auxiliares: Felipe Lopecillo Rocabado y Sebastián Bustos

RESUMEN

- **Funciones contractantes**. Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice *contractante* si existe $K < 1$ tal que $\forall x, y \in \Omega$

$$||f(x) - f(y)||_{\mathbb{R}^m} \leq K||x - y||_{\mathbb{R}^n}$$

- **Teorema del punto fijo de Banach**. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *cerrado* y $f : \Omega \to \Omega$ *contractante*. Entonces f posee un único punto fijo.

- **Teorema de la función inversa** Sea $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y sea $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$ tal que $Df(x_0)$ es invertible entoces f es localmente invertible en x_0.
Es decir, existen conjuntos abiertos $U \subseteq \Omega$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \in U$,$f|_U : U \to f(U)$ es invertible y $(f|_U)^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(U), \mathbb{R}^n)$.
Además, para $y_0 = f(x_0)$, se tiene que:

$$D(f|_U)^{-1}(y_0) = (Df(x_0))^{-1}$$

(Normalmente se abusa de notación y se utiliza $f|_U = f$ indistintamente)

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$$

1. ¿Es f biyectiva?
2. Muestre que la función es localmente invertble en cualquier punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Calcule el valor de Df^{-1} en esos puntos.

P2. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua

1. Pruebe que si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F^{n_0} (Donde $F^n = F \circ F \circ ... \circ F$ n veces) es contractante entones F tiene un punto fijo.

2. Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \geq 0$, donde:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} S_i < \infty$$

Suponga que F cumple lo siguiente:

$$||F^n(x) - F^n(y)|| \leq S_n||x-y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Pruebe que F tiene un punto fijo.

P3. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación que verifica las siguientes propiedades para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$:

- $\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq \alpha||x-y||^2$
- $||F(x) - F(y)|| \leq \beta||x-y||$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son constantes dadas. Demostraremos que bajo estas condiciones F es biyectiva y continua.

1. Pruebe que F es inyectiva y continua
2. Para probar sobreyectividad de F, siga los siguientes pasos. Para $y \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$ fijos, definamos la aplicación

$$\phi_{y,\lambda} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \phi_{y,\lambda}(x) = x - \lambda(F(x) - y)$$

   a) Demuestre que $\phi_{y,\lambda}$ es una función Liptschitz
   b) Demuestre que para λ adecuado es contractante.
   c) Usando el teorema del punto fijo de Banach concluya lo pedido.

P4. **[Propuesto]** Sea $k > 1$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función sobreyectiva, no necesariamente continua, tal que:

$$||f(x) - f(y)|| \geq k||x-y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Muestre que existe un único punto fijo de f.
Indicación: Pruebe que f es biyectiva y aplique la desigualdad a f^{-1}

P5. **[Propuesto]** Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$$

1. Determine todos los puntos para los cuales f es localmetne invertible.
2. Hallar la matriz Jacobiana de f^{-1} en todos los puntos donde f es localmente invertible.