# Auxiliar 5

Regla de la cadena

**Profesor: Ángel Pardo**
Auxiliares: Felipe Lopecillo Rocabado y Sebastián Bustos

**P1.**

- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1$ que satisface la identidad

$$3x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y^2 \frac{\partial f}{\partial y} = 3(f(x,y))^2$$

Considere el cambio de variable:

$$u(x,y) = x \text{ y } v(x,y) = \frac{1}{3x} - \frac{1}{2y}$$

Definamos la función $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Pruebe que $g$ satisface la ecuación:

$$u^2 \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = (g(u,v))^2 \tag{1}$$

- Muestre que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^1$, entonces la función:

$$g(u,v) = \frac{u}{1 + uh(v)}$$

es solución de (1)

**P2.** Supongamos que $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son diferenciables en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y $\nabla g(x_0) \neq 0$.

- Suponiendo que $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$ para algun $\lambda \in \mathbb{R}$ muestre que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te)}{g(x_0 + te)} = \lambda$$

para todo $e$ tal que $\nabla g(x_0) \cdot e \neq 0$.

- Muestre que si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, entonces $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

**P3**

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f$ de clase $C^1$. Se define $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ como $F(x,y,z) = (z - xf^2(y + z), x + yf(xz^2))$. Calcule la matriz jacobiana de $F$ donde exista.

- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2y, xy^2)$
  - Calcule el jacobiano de $f$. ¿Es $f$ diferenciable? Justifique
  - Sea $f_n = f \circ f \circ ... \circ f$ n veces, y $f_0 = id$. Pruebe que el Jacobiano de $f_n$ en $(1,1)$ es:

$$Jf_n(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n$$

**P4** Sea $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dos funciones derivables tales que sus derivadas no se anulan y definimos la función $z = f(xg(y))$

- Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$
- Suponiendo que $x\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ entonces pruebe que $g(y) + g'(y) = 0$

**P5.**

- Considere la superficie definida por la ecuación

$$z = \sin(\pi x^2)e^{x-y^3}$$

  Encuentre la ecuación del plano tangente a esta superficie en el punto $(1,1,0)$
- [**Propuesto**] Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y) = (x^2y + e^{xy}, x + y^2, \sin(xy))$$

  Demuestre que $f$ es diferenciable en el punto $(1,0)$ y encuentre su matriz jacobiana en este punto.

**P6** [**Propuesto**] Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $f = f(x,y,z)$ definamos la función compuesta:

$$F(r,\theta,\phi) = f(r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi)) \qquad r \in [0,\infty), \theta \in [0,2\pi), \phi \in [0,\pi)$$

- Calcule usando regla de la cadena, las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \phi}$$

- Demuestre que:

$$||\nabla f||^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)^2$$