Guía Control 1

Profesor: Ángel Pardo
Auxiliares: Felipe Lopecillo Rocabado y Sebastián Bustos

P1. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal biyectiva. Sea $||\cdot||$ es una norma de $\mathbb{R}^n$ demuestre que la aplicación $||\cdot||'$:

$$||\vec{x}||' = ||T(\vec{x})|| \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Define otra norma en $\mathbb{R}^n$.

P2. Defina $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $h(x) = ||x||_\infty + ||x||_2$. Demuestre que h es norma en $\mathbb{R}^n$.

P3. Sean $||\cdot||_a$ y $||\cdot||_b$ normas. Se define la aplicación:

$$N(x) = \sqrt{||x||_a^2 + ||x||_b^2}$$

Demostrar que N es una norma.
Indicación: Le será util la siguiente desigualdad:

$$pr + qs \leq \sqrt{(p^2+q^2)(r^2+s^2)} \ \forall p, q, r, s \in \mathbb{R}$$

(En la pregunta daban como Bonus 1 punto por demostrar la desigualdad de la indicación)

P4. Sea $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se le llama seminorma si:

a) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho(x) \geq 0$
b) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$
c) Para todo par $x, y \in \mathbb{R}$, $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

a) Muestre que si ρ es una seminorma que además cumple que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \ \rho(x) \neq 0$$

entonces ρ es norma.

b) Muestre que si ρ es una seminorma, entonces para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x-y)$$

P5. Sea $M = M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Definimos en este espacio:

$$||A|| = \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

a) Pruebe que $||\cdot||$ es una norma en M.

b) Muestre que para todo par de matrices $A, B \in M$ se tiene que:

$$||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

Indicación: Recuerde que:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

c) Muestre que para toda matriz $A \in M$ y para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple:

$$||Ax||_1 \leq ||A|| \cdot ||x||_1$$

Indicación: Recuerde que

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

d) Sea $A \in M$ una matriz invertible y sea $E \in M$ tal que $||A^{-1} \cdot E|| < 1$. Demuestre que $A + E$ es una matriz invertible.
Indicación: Recuerde que una matriz es invertible si y solo $T(x) = Ax$ es tal que $Ker(T) = \{0\}$. Use entonces la parte (c) en forma adecuada.

e) Sea $I \subseteq M$ el conjunto de las matrices invertibles. Sean $A \in I$ y $E \in B\left(0, \frac{1}{||A^{-1}||}\right)$. Muestre que $A + E$ es invertible y concluya que I es un conjunto abierto en el espacio M.

P6. **[Desafío]** Sea $||\cdot||$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y sea M un sev cerrado de $\mathbb{R}^n$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ definimos su clase de equivalencia como:

$$[x] = \{x + m : m \in M\}$$

El conjunto cuociente $\mathbb{R}^n/M$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia, es decir:

$$\mathbb{R}^n/M = \{[x] : x \in \mathbb{R}^n\}$$

Note que se tiene que $y \in [x]$ ssi $y - x \in M$.

Con las operaciones de suma $[x] + [y] = [x + y]$ y de ponderación $\lambda[x] = [\lambda x]$ el conjunto $\mathbb{R}^n/M$ resulta ser un espacio vectorial (no lo pruebe).

a) Pruebe que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ se tiene que $\lambda \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. En particular concluya que si U es un sev de $\mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall v \in \mathbb{R}^m) \inf_{u \in U} ||v + u|| = \inf_{u \in U} ||v + \lambda u||$$

Esta igualdad la puede usar en la siguiente parte.

b) Se define la aplicación

$$\begin{array}{rcl} ||\cdot||' : \mathbb{R}^n/M & \to & \mathbb{R} \\ [x] & \mapsto & ||[x]||' = \inf_{m\in M} ||x+m|| \end{array}$$

Muestre que $||\cdot||'$ define una norma sobre $\mathbb{R}^n/M$.
Hint: Muestre que $[x] = 0 \iff [x] = [0]$

P7. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, demuestre que:

a) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$
b) $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$ (dé un ejemplo donde no hay igualdad)
c) $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$
d) $\text{Adh}(A \cap B) \subseteq \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$ (dé un ejemplo donde no hay igualdad)
e) $\text{Adh}(A) = \text{Int}(A) \cup \partial(A)$
f) $A \subseteq B \Rightarrow \text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$ y $\text{Adh}(A) \subseteq \text{Adh}(B)$
g) $\text{Int}(A \cap B) = \emptyset \iff \text{Int}(A \cap \text{Adh}(B)) = \emptyset$
h) $\text{Adh}(A) = \mathbb{R}^n$ y $\text{Int}(B) \cap A = \emptyset \Rightarrow \text{Int}(B) = \emptyset$
i) $\text{Adh}(A) = \mathbb{R}^n$ y $\text{Int}(A) = \emptyset \Rightarrow \text{Adh}(A^c) = \mathbb{R}^n$ y $\text{Int}(A^c) = \emptyset$
j) $\text{Int}(A) = \emptyset \iff \text{Adh}(A^c) = \mathbb{R}^n$
k) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua $\Rightarrow f(\text{Adh}(A)) \subseteq \text{Adh}(f(A))$
l) A abierto $\Rightarrow \text{Int}(\partial(A)) = \emptyset$

P8. a) Para los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, determine su interior, adherencia y frontera. Justifique porque estos conjuntos son abiertos, cerrados, o si no son ni abiertos ni cerrados.

1) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, 1 < y < 2\}$
2) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$
3) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 < x < 7, 1 \leq y \leq 2\}$
4) $A_4 = \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N}\}$
5) $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(0, 0)\}$
6) $A_6 = \{\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y+1}\right) : x > 0, y \geq 0\}$
7) $A_7 = \{(x, y) : \exists a \in \mathbb{R} : y = \tanh(x - a)\}$
8) $A_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y > \tan(x)\}$
9) $A_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists m \in \mathbb{N}, y = mx\}$
10) $A_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \sin(y) < \log(1 + |x| + |y|)\}$

b) Haga lo mismo para los siguientes sub-conjutos de $\mathbb{R}^3$

1) $B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > x^2 + y^2\}$
2) $B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 + y^2\}$
3) $B_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 > \frac{x^2+y^2}{z}\}$
4) $B_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1\}$
5) $B_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \leq 1, \sin(x^2 + y^2 + 6) < x^3 + 4\}$

P9. En la recta real se considera el conjunto

$$A = [0, 2) \cup \left\{2 + \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{5, 7\}$$

a) Determine la adherencia, interior y frontera del conjunto A.

b) Clasifique los números reales $0, 1, 2, 3, \frac{5}{2}, 6, 6, 8$ dentro de los conjuntos de la parte (a)

c) Encuentre el menor conjunto cerrado que contiene a A y el menor intervalo cerrado que contienen a A

d) Encuentre el mayor conjunto abierto contenido en A y el mayor intervalo abierto contenido en A.

P10. *a)* Sean M un sub espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y consideremos una norma $||\cdot||$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\exists m_0 \in M$ que materializa la distancia de x_0 a M es decir:

$$||x_0 - m_0|| = dist(x_0, M) := \inf\{||x_0 - m|| : m \in M\}$$

Indicación: Justifique la existencia de una sucesión acotada $\{m_n\}$ en M tal que:

$$||x_0 - m_m|| \to dist(x_0, M), \text{ cuando } n \to \infty$$

b) Sea M un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$ (es decir $\{0\} \subsetneq M \subsetneq \mathbb{R}^n$). Pruebe que $\exists x \in B(0, 1)$ tal que $dist(x, M) = 1$.
Indicación: Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash M$ y sea $m_0 \in M$ tal que $||x_0 - m_0|| = dist(x_0, M)$. Considere el vector normalizado de $x_0 - m_0$

P11. *a)* Demuestre que un subconjunto cerado de un compacto, también es compacto.

b) Demuestre que la intersección de un conjunto compacto con un conjunto cerrado, es un conjunto compacto.

P12. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x \neq y$, y sea $r > 0$ de manera que el conjunto $A = B(x, r) \cap B(y, r) \neq \emptyset$. Demostrar **por definición** que A es abierto en $\mathbb{R}^n$

P13. Sea $||\cdot||$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que la distancia de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ al conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ está definida por:

$$d(A, x) = \inf_{y \in A} ||y - x||$$

a) Pruebe que $d(x, A) = d(x, \text{Adh}(A))$ para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^n$

b) Si A es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, demuestre que:

$$x \notin A \iff d(A, x) > 0$$

c) Demuestre que d_A es continua.

d) Si el conjunto A es cerrado y $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto tal que $A \cap K = \emptyset$ demuestre que existe $\delta > 0$ que verifica:

$$d(A, x) \geq \delta, \ \forall x \in K$$

Indicación: Puede resultarle útil el resultado de la $P5$ del Auxiliar 2.

P14. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{6x|y|}{x^2+12x^2y^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Sea $\theta_n=\frac{n\alpha}{n+1}+\pi n$ y r_n una sucesión decreciente de $\mathbb{R}_+$ tal que $r_n\to 0$. Considere:

$$A=\{f(r_n\cos(\theta_n),r_n\sin(\theta_n))\}$$

Demuestre que $\operatorname{Adh}(A)=A\cup\{-6\cos(\alpha)|\sin(\alpha)|,6\cos(\alpha)|\sin(\alpha)|\}$

P15. Considere $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$, una suseción que satisface $t_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}$ y $t_n\to 0$. Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$, probar que:

$$A \text{ es acotado } \iff \forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A, \text{ se cumple que } \lim_{n\to\infty} t_nx_n=0$$

Indicación 1: ($A\subseteq\mathbb{R}^n$ es acotado) $\iff$ ($\exists R>0,\ \forall x\in A,\ ||x||\leq R$).
Indicación 2: Recuerde que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ significa que $x_n\in A,\forall n\in\mathbb{N}$

P16. Estudie la existencia de los siguientes limites, en caso de existir calculelos.

a)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cos(y)-y\cos(x)-x+y}{x^2+y^2}$$

b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

c)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^4-y^4)+1}{x^2+y^2}$$

d)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}}$$

e)
$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},1)}\tan(xy)^{\frac{1}{1-\tan(xy)}}$$

f)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}$$

g)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2(x^3+y^2)+x^4}{x^4+y^4}$$

h) Calcule en función de los números naturales $n\geq 2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^n+y^n}{x^2-y^2}$$

i)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^4+y^2x^2+z^4}$$

j)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{\sqrt{x^{12}+y^6+z^4}}$$

P17. Sea $f(x,y) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}-1}} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determine $A = Dom(f)$ y grafique.

b) Encuentre $\text{Adh}(A)$, $\text{Int}(A)$. Justifique su respuesta.

c) Encuentre α tal que f sea continua en su dominio.

P18. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Si $\alpha > 1$, demuestre que f es continua en todo su dominio.
Indicación: Recuerde que $x^2+y^2 \geq 2|xy|$

b) Si $\alpha \leq 1$, demuestre que f no es continua.

P19. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{50x^2y^2}{x^2+y^2} \ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 1 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demuestre f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.
Hint: Para demostrar la continuidad en 0, puede serle útil recordar que

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ 2|ab| \leq a^2+b^2$$

También recuerde que $\ln\left(\frac{1}{r}\right) = -\ln(r)$

b) Sea el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 50x^2y^2 \ln(x^2+y^2) > x^2+y^2\}$$

Muestre que A es abierto.

c) Sea el conjunto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq 0\}$$

Muestre que K es no vacío y cerrado. Pruebe que f alcanza su máximo en $\mathbb{R}^2$.
Hint: Recuerde que una función continua en un compacto alcanza su máximo y su

mínimo. A su vez analice el comportamiento de la función fuera y dentro del conjunto K

P20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x^2+y^2)} - 1}{\ln(1 + x^2 + y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en todo su dominio.

b) Pruebe que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)||_2 \leq \frac{5}{3}, e^{(x^2+y^2)} - 1 \geq \ln(1 + x^2 + y^2)^{\frac{5}{3}}\}$ es compacto, donde $||\cdot||_2$ denota la norma Euclideana.

c) Verifique que el conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, \sqrt{x^2+y^2} \leq 3\}$ no es ni abierto ni cerrado.

P21. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y \leq 0 \\ \sqrt{x+y} + xy & \text{si } x + y > 0 \end{cases}$$

Determine todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ donde f es continua. Justifique su respuesta.

P22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{|x|}} e^{|y|}}{|x| + |y|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Demuestre que $f(x,y)$ es una función continua,

b) ¿Es $\lim\limits_{||(x,y)|| \to \infty} f(x,y) = +\infty$?

P23. Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$, y considere la función $f : C \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\cos(2e^x + y)}{x^4 + 3y^{\frac{4}{3}}} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Haga un dibujo de C y muestre que es acotado, pero no es compacto.

b) Muestre que f es continua en C. (Indicación: Puede ser útil notar que $\frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{4}{3}}=1$)

c) Considere $z \in [0,1]$, y una sucesión $w_n = (x_n, y_n)$ en C tal que $w_n \to (1,z)$. Mostrar que existe n_0 tal que $f(w_n) \geq 0$ para todo $n \geq n_0$. (Indicación: Verifique que existe n_0 tal que $x_n > \ln\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ para todo $n \geq n_0$, y por lo tanto $2e^{x_n} + y_n \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ para dichos valores de n. Puede utilizar que $\frac{3\pi}{4} < e < \pi$)

d) Para cada $z \in [0,1]$ calcule $\lim\limits_{(x,y) \to (1,z)} f(x,y)$

e) Probar que la función f alcanza su mínimo en C. Para esto se puede seguir los siguientes pasos:

   1) Considere el punto $x_0 = \left(\ln\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)\right)$ de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que $x_0 < 0$.
   2) Demuestre, usando sucesiones, que el conjunto $D = \{x \in C : f(x) \leq f(x_0)\}$ es cerrado. Concluya que es compacto.
   3) Deduzca que $f|_D$ [es decir $f : D \to \mathbb{R}$] alcanza su mínimo y concluya lo pedido.

P24. Sea h una función dada por:

$$h(x) = \frac{x}{||x||^2}$$

a) Determine el dominio de h

b) ¿Es h una función continua en su dominio?

c) Encuentre la imagen $h(A)$ con $A = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| > 1\}$

d) Encuentre todos los puntos fijos de h, es decir, los puntos tales que $h(x) = x$

e) Sea $f : B \to \mathbb{R}$ una función continua. Donde $B = \{x \in \mathbb{R}^n \geq 1\}$ y $\lim\limits_{||x|| \to \infty} f(x) = \infty$. Sea $g : S \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$, definida por:

$$g(x) = (f \circ h)(x)$$

Demuestre que g alcanza su mínimo en $S \backslash \{0\}$

P25. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función cuadrática definida positiva, es decir $F(x) = x^t A x$ con A una matriz real y $F(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ y $F(0) = 0$. Pruebe que $\exists M > 0$ tal que:

$$F(x) \geq M||x||_2^2 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Indicaciones:

a) Demuestre que F es continua

b) Considere F sobre $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_2 = 1\}$ y demuestre que existe $M > 0$ tal que $F(x) \geq M, \forall x \in S$, donde $M = F(x_0)$, para algún $x_0 \in S$.

c) Dado $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, se puede escribir $x = \frac{x}{||x||_2}||x||_2$ y de acuerdo a lo anterior concluya.

P26. Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacíos. Se define la distancia entre A y B como:

$$d(A, B) = \inf\{||x - y|| : x \in A, y \in B\}$$

a) Demuestre que si

$$A_1 \subseteq A_2 \wedge B_1 \subseteq B_2 \to d(A_2, B_2) \leq d(A_1, B_1)$$

b) Muestre que $d(A, B) = d(\mathrm{Adh}(A), \mathrm{Adh}(B))$

c) Concluya que $d(x, F) = d(x, \mathrm{Adh}(F))$

P27. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Pruebe que el conjunto de discontinuidad de f (es decir, el conjunto de puntos donde f no es continua) es cerrado. Determínelo explicitamente.

P28. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. Pruebe que los siguientes son equivalentes:

a) f es continua en todo $\mathbb{R}^n$.

b) f es continua en 0.

c) $\exists C > 0$ tal que $\|f(x)\|_2 \leq C\|x\|_2$.

P29. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un sev. Se define el conjunto ortogonal a F, denotado por $F^\perp$ como:

$$F^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in F\}$$

a) Demuestre que el producto punto es una función continua. Indicación: Recuerde la desigualdad de Cauchy- Schwarz

b) Demuestre que $F^\perp$ es un sev cerrado de $\mathbb{R}^n$.

P30. Sea A un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua en A. Demuestre que el conjunto de los ceros de la función, es decir:

$$B = \{x \in A : f(x) = 0\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^n$

P31. Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto. Sea $f : K \to \mathbb{R}^m$ una función continua e inyectiva.

a) Demuestre que $f(K) \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto compacto.

b) Muestre que $f^{-1} : f(K) \to K$ es continua

c) ¿Es cierta la parte (a) si suponemos que K es solo cerrado?

P32. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función aditivia, es decir:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

que ademas cumple que $f(B(\vec{0}, 1))$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^m$. Pruebe que f es una función lineal continua.

Hint: Para probar que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pruebelo primero para $\lambda \in \mathbb{N}$, luego para $\lambda \in \mathbb{Z}$ y finalmente para $\lambda \in \mathbb{Q}$. Antes de concluir el caso general, podría serle util probar primero la continuidad de f. Para la continuidad le conviene considerar δ de la forma $\frac{1}{p}$, con $p \in \mathbb{N}$. También recuerde que $\text{Adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

P33. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función tal que $\lim\limits_{||x|| \to \infty} f(x) = 0$

a) Sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tal que $f(x_0) = \alpha > 0$. Demuestre que el conjunto:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq \alpha\}$$

es compacto en $\mathbb{R}^n$

b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente. Pruebe que:

$$\sup_{x \in K} f(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

y concluya que $g \circ f$ alcanza su máximo en $\mathbb{R}^d$, es decir, que existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$(g \circ f)(\overline{x}) \geq (g \circ f)(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

P34. [C1-2018] Para $i = 1, ..., N$ se define la i-ésima proyección de un vector $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ como $\pi_i(x) = x_i$.

a) Pruebe que la función $\pi_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es continua para todo $i = 1, .., N$.

b) Deduzca que toda función polinomial $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_N^{k_N}$ es continua, donde $k_1, ..., k_N \in \mathbb{R}$.

c) Concluya que todo polinomio p en N variables define una función continua de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$.

Dada $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$, identificamos A como un vector en $\mathbb{R}^{N^2}$ por medio de la asignación

$$x(A) = (A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, ..., A_{\bullet N}) = (A_{11}, ..., A_{N1}, A_{12}, ..., A_{1N}, ..., A_{NN}) \in \mathbb{R}^{N^2} \tag{1}$$

Recordemos además que el determinante de una matriz de $N \times N$, denotado det_N, se puede definir por recurrencia como:

$$\begin{aligned} det_1(A) &= A, \ A \in M_{1\times 1}(\mathbb{R}) \\ det_N(A) &= \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} \cdot A_{i1} \cdot det_{N-1}(A^{i1}), \ A \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

donde A^{ij} es la matriz de $(N-1) \times (N-1)$ obtenida al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

d) Pruebe, usando inducción, que para todo natural $\ell \geq 1$ la función $det_N : \mathbb{R}^{N^2} \to \mathbb{R}$ es un polinomio con respecto a los elementos de la matriz $X = (X_{ij}) \in M_{\ell\times\ell}(\mathbb{R})$.

Indicación: Por ejemplo si $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $det_2(X) = X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12} = p(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22})$ con $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ el polinomio de cuatro variables es $p(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_4 - x_2 x_3$

e) Deduzca que, bajo la identificación en 1, $det_N : \mathbb{R}^{N^2} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

f) Concluya que el conjunto $GL(N; \mathbb{R}) = \{A \in M_{N\times N} : A \text{ es invertible }\}$ es abierto en $\mathbb{R}^{N^2}$.
Indicación: Recuerde que $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ es invertible ssi $det_N(A) \neq 0$

P35. [Tarea 2 - 2018] Recordemos que una función $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice norma si satisface las siguientes condiciones:

a) $||x|| \geq 0$

b) $||x|| = 0 \iff x = 0$

c) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

d) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Dos normas $||\cdot||$, $|||\cdot|||$ se dicen equivalentes si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tal que:

$$\alpha||x|| \leq |||x||| \leq \beta||x||$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En este caso escribiremos $||\cdot|| \sim |||\cdot|||$.

El proposito de este problema, es probar que en $\mathbb{R}^n$ **todas las normas son equivalentes.** Para ello, considere $||\cdot||$ una norma cualquiera y $||\cdot||_1$ la norma 1; recordar que se define como:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

(no es necesario que pruebe que esto define una norma) y siga los siguientes pasos:

a) Pruebe que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia, esto es, verifique que es reflexiva, simétrica y transitiva. Sea $||\cdot||$ una norma cualquiera.

b) Notando que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede descomponerse como $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ con e_i el i-ésimo vector canónico, pruebe que $||x|| \leq \beta||x||_1$ con $\beta = \max ||e_i||$.

c) Pruebe que $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua cuando en $\mathbb{R}^n$ se considera la norma $||\cdot||_1$.

d) Considere el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_1 = 1\}$. Argumente por qué este conjunto es compacto en $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma $||\cdot||_1$, y utilizando la parte anterior, concluya que existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha||x||_1 \leq ||x||$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

e) Concluya el resultado esperado.

P36. Sea $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f.

b) Calcule, donde exista, el gradiente de f. En caso que no exista justifique por qué.

c) Diga si f es diferenciable (justifique).

P37. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \sin\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}^2$

b) Calcule, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$

c) Estudie la diferenciabilidad de la función en $(0,0)$

P38. Considere la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Demuestre que f es continua en $(0,0)$

b) Determine si existen las derivadas parciales en el $(0,0)$

c) Determine si f es diferenciable en el $(0,0)$

P39. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Muestre que f es continua en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

b) Pruebe que f es continua en $(0,0)$ si y solamente si $\alpha>\frac{3}{2}$
Indicación: Recuerde que $2xy\leq x^2+y^2$ para todo valor de x,y.

c) Calcule las derivadas parciales en todo punto de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

d) Calcule, usando la definición, las derivadas parciales en $(0,0)$ y $(0,0)$

e) Encuentre los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ tales que f es diferenciable en $(0,0)$.
Indicación: Póngase en casos de α.

P40. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log(1+x^2+y^2)+x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ a & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Encuentre a de modo que f sea continua en $\mathbb{R}^2$

b) Calcule las derivadas parciales en todo punto $(x,y)\neq(0,0)$

c) Calcule, si existe, las derivadas parciales en el punto $(0,0)$

d) Determine en qué puntos son continuas las derivadas parciales.

P41. Para $\gamma\in\mathbb{R}$ considere $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{2x+2y}-1}{e^{x+y}-1} & \text{si } x+y\neq0\\ \gamma & \text{si } x+y=0\end{cases}$$

a) Encuentre γ tal que f sea continua en $\mathbb{R}^2$

b) Para el valor de γ anterior, calcular las derivadas en todo punto de $\mathbb{R}^2$

c) Para el valor de γ encontrado en (a) determinar la diferenciabilidad de f en todo punto de $\mathbb{R}^2$

P42. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^4+y^4+x^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demostrar que f es continua para $\alpha > 3$

b) Para $\alpha = 2$ y θ tal que $\cos(\theta) \neq 0$, defina $\phi(t) = f(t\cos(\theta), t\sin(\theta))$ y muestre que $\phi'(0) = \frac{\sin^2\theta}{\cos(\theta)}$

c) ¿En qué direcciones e existe la derivada direccional en el punto $(0,0)$ para $\alpha = 2$? Escriba su valor en las direcciones que corresponda.

d) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$ para $\alpha = 2$? Justifique.

P43. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$$

a) Analizar continuidad de f en $\mathbb{R}^2$

b) Calcular las derivadas parciales de f en todo punto de $\mathbb{R}^2$, si es que existen.

P44. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } ||x|| \neq 0) \\ a & \text{si } ||x|| = 0 \end{cases}$$

a) Encuentre a de modo que f sea continua en $\mathbb{R}^2$

b) Calcule las derivadas parciales en el punto $(0,0)$

c) Determine en qué punto son continuas las derivadas parciales de f.

d) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$

P45. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y definamos $g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ mediante:

$$g(x) = f\left(\frac{x}{||x||}\right)$$

a) Pruebe que g alcanza su máximo y mínimo en $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Ind.: Considere g restringida al conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$

b) Demuestre que si f no es una función constante entonces el límite

$$\lim_{x \to 0} g(x)$$

no existe

P46. Para una función: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ considere la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{4x} \sin^2(y)$$

Se le pide encontrar una solución de $f(x, y)$ de este problema, definida en todo $\mathbb{R}^2$. Para ello, busque una solución de la forma.

$$f(x, y) = g(e^x \cos(y), e^x \sin(y))$$

y encuentre una ecuación para g.

P47. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función homogénea de grado p, es decir:

$$f(tx, ty) = t^p f(x, y)$$

a) Demuestre que las derivadas parciales, si existen, son funciones homogéneas de grado $p - 1$

b) Si f es diferenciable, demuestre la siguiente relación (llamada Relación de Euler):

$$\langle (x, y), \nabla f(x, y)\rangle = pf(x, y)$$

P48. Sea $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$g(x, y, z) = [g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)] = [x^2 + y^2 + z^2, x + y + z]$$

Si $h = f \circ g$ demuestre que:

$$||\nabla h||_2^2 = 4\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 g_1 + 4\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} g_2 + 3\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

P49 Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x, y) = f(g(xy), f(y^2, x))$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables. Calcule las derivadas parciales de F.

P50 Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Se define $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ donde $u(x, y) = x + y$ y $v(x, y) = \sin(x - y)$

a) Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\cos^2(x - y)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

y explicite en que puntos están evaluadas cada una de las derivadas parciales.

b) Verifique lo anterior para $f(u, v) = v^2 - u \sin^{-1}(v)$

P51 Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función definida por:

$$F(x, y) = (g(x, g(x, y)), g(g(x, y), y))$$

Donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Calcule $JF(x, y)$ en términos de g y sus derivadas.

P52 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Para $\rho > 0, \phi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}$, considere el siguiente cambio de variable:

$$f(\rho, \phi, z) = f(\rho \cdot \cos(\phi), \rho \cdot \sin(\phi), z)$$

Demuestre que se cumple:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$