Comentarios Aux 3

Por: Sebastián Bustos

Unas compeñeras y compañeros de ustedes me mencionaron que al hacer la $P1$ me equivoque en un signo y por eso nos quedo el problema de que para ciertos ϵ el valor de δ era negativo.

Quizas la forma en que lo hice en el momento si tuve un error asi, pero también puede ser que las cotas que me tome fueron muy burdas, aquí les escribo la demostración corregida como lo hicimos en el auxiliar.

Tenemos que demostrar por definición $\epsilon - \delta$ que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2}{x+y} = \frac{1}{3}$$

Es decir hay que mostrar que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||(x,y)-(1,2)|| \leq \delta \to \left| \frac{x^2}{x+y} - \frac{1}{3} \right| \leq \epsilon$$

Primero tomamos $\delta = 1$ como candidato. Con esto tenemos que:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \leq 1$$

Y elevando al cuadrado tenemos que:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1$$

Entonces tenemos que $|x-1 \leq 1$ y $|y-2| \leq 1$ es decir $0 \leq x \leq 2$ y $1 \leq y \leq 3$, de esta forma:

$$1 \leq x+y \leq 5 \to \frac{1}{x+y} \leq 1 \tag{1}$$

Entonces ahora desarollamos la parte de la implicancia:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x^2}{x+y} - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{3x^2 - x - y}{3(x+y)} \right| \\
&\leq \left| \frac{3x^2 - x - y}{3} \right|, \text{ por (1)} \\
&= \left| \frac{3x^2 - 3x + 3x - x - y}{3} \right| \\
&= \left| \frac{3x(x-1) + 2x - y}{3} \right|
\end{aligned}$$

Y aqui es donde cometí el error en el auxiliar y acote por la suma de todos, lo conveniente es acotar de la siguiente manera, con el fin de construirnos terminos de la forma $x-1$,$y-2$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2}{x+y}-\frac{1}{3}\right| &\leq \left|\frac{3x(x-1)}{3}\right| + \left|\frac{2x-y}{3}\right| \\
&= |x(x-1)| + \left|\frac{2x-2+2-y}{3}\right| \\
&= |x||x-1| + \left|\frac{2(x-1)-(y-1)}{3}\right| \\
&\leq |x||x-1| + \left|\frac{2(x-1)}{3}\right| + \left|\frac{y-1}{3}\right|
\end{aligned}$$

Ahora recordemos que $(x-1)^2+(y-2)^2 \leq \delta^2$ de esta manera, $|x-1| \leq \delta$ y $|y-2| \leq \delta$ y en consecuencia: $1-\delta \leq x \leq \delta + 1$.

Ahora como trabajamos todo con $\delta = 1$ podemos asumir que nuestro candidato final cumple que $\delta \leq 1$; y por ende $x \leq 0$, y por eso $|x| \leq \delta + 1$

Con esto obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2}{x+y}-\frac{1}{3}\right| &\leq |x||x-1| + \left|\frac{2(x-1)}{3}\right| + \left|\frac{y-1}{3}\right| \\
&\leq (\delta+1)\delta + \frac{2}{3}\delta + \frac{\delta}{3} \\
&= (\delta+1)\delta + \delta
\end{aligned}$$

Asi desaparecio el $\frac{4}{3}$ que nos molestaba :D.

Y con esto obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2}{x+y}-\frac{1}{3}\right| &\leq (\delta+1)\delta + \delta \\
&= \delta^2 + 2\delta \\
&\leq 3\delta, \text{ ya que } \delta \leq 1
\end{aligned}$$

Asi si tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ estamos listos ya que:

$$\left|\frac{x^2}{x+y}-\frac{1}{3}\right| \leq \epsilon$$

Ahora impuse todo el rato que se tenia $\delta \leq 1$. Por lo tanto nuestro $\overline{\delta}$ que nos sirve para concluir lo pedido es:

$$\overline{\delta} = \min\left(1, \frac{\epsilon}{3}\right)$$

Con esto conlcuimos lo pedido. Perdonen por la confusión.

Por otro lado cuando demostramos que:

$$f \text{ es continua } \iff \forall A \text{ abierto }, f^{-1}(A) \text{ es abierto.}$$

Hubo confusión en la demostración para el lado $\leftarrow$. Por lo tanto la revisaré en detalle por aquí.

En primer lugar demostremos que f es continua para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es decir: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||x - x_0|| < \delta \to ||f(x) - f(x_0)|| < \delta$.

Por lo tanto, tomemos $\epsilon > 0$. Y mostremos que exsite un δ para el cual se cumple lo pedido.

Tomemos algún x tal que $f(x) \in B'(f(x_0, \epsilon))$. Claramente podemos hacer eso ya que $x_0 \in B'(f(x_0, \epsilon))$.

Entonces como $B'(f(x_0), \delta)$ es un abierto tenemos que $f^{-1}(B(f(x_0, \epsilon)))$ es un abierto. Así por definición de abierto, como $x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0, \epsilon)))$, $\exists \delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0, \epsilon)))$.

Asi tenemos que:

$$\begin{aligned}
\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad &: \quad B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0, \epsilon))) \\
&\iff \quad x \in B(x_0, \delta) \to x \in f^{-1}(B(f(x_0, \epsilon))) \\
&\iff \quad ||x - x_0|| \leq \delta \to f(x) \in B(f_{x_0}, \epsilon) \\
&\iff \quad ||x - x_0|| \leq \delta \to ||f(x) - f(x_0)|| \leq \epsilon
\end{aligned}$$

Y por ende obtuvimos que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||x - x_0|| \leq \delta \to ||f(x) - f(x_0)|| \leq \epsilon$$

y f es continua en x_0. Pero esto lo hicimos para cualquier x_0, conlcuimos que f es continua.