Auxiliar 3

Funciones y continuidad

Profesor: Ángel Pardo
Auxiliares: Felipe Lopecillo Rocabado y Sebastián Bustos

P1. Calcule los siguientes limites por definición $\epsilon - \delta$

1. $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2}{x+y} = \frac{1}{3}$$

2. [**Propuesto**] $$\lim_{(x,y)\to(3,4)} xy = 12$$

P2. Estudie la existencia de los siguientes limites:

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{(x^2-y^2)^2}$$

2. Calcule en función de $\alpha \in \mathbb{R}$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^\alpha}{x^4+y^2+x^2}$$

3. [**Propuesto**] $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^4}}$$

4. [**Propuesto**] $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y}{x^2+y^2-2x+1}$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pruebe que las siguientes porposiciones son equivalentes:

a) f es continua en todo punto de $\mathbb{R}^n$

b) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto $f^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$

c) $\forall C \subseteq \mathbb{R}^m$ cerrado $f^{-1}(C)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$

Indicación: Pruebe que $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$

P4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos los conjuntos

$$\begin{aligned}
Gr(f) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \\
Epi(f) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\} \\
S_c(f) &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\} \text{ Para algún } c \in \mathbb{R} \\
S'_c(f) &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\} \text{ Para algún } c \in \mathbb{R} \\
N_c(f) &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\} \text{ Para algún } c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

a) Demuestre que f es continua ssi $G(f)$ es un conjunto cerrado

b) **[Propuesto]** Si f es continua demuestre que $Epi(f), S_c(f)$ y $N_c(f)$ son cerrados.

c) **[Propuesto]** Construya $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $Epi(g), S_c(g)$ y $N_{c'}(g)$ (Para algún valor de c y c' dado por usted, pueden ser distintos) no sean cerrados.

d) **[Propuesto]** ¿Es $S'_c(f)$ siempre un conjunto cerrado cuando f es continua? Justifique su respuesta.

P5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado. $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Sea $L \in \mathbb{R}_+$. Se tiene que $f : A \to B$ es Lipschitziana de constante L, es decir :

$$||f(x) - f(y)||_{\mathbb{R}^m} \leq L||x - y||_{\mathbb{R}^n} \ \forall x, y \in A$$

a) Demuestre que f es una función continua en A.

b) Demuestre que f alcanza su mínimo y su máximo en A.

c) Demuestre que si $L \in (0,1)$, $n = m$ y $A = B$. La función alcanza un único punto tal que $f(x) = x$. Para esto considere la función $g(x) = ||f(x) - x||$ y muestre que:
   - g alcanza su mínimo, digamos x_0
   - Muestre que $f(x_0) = x_0$ Hint: Razone por contradicción.
   - Demuestre que x_0 es el único punto que cumple lo anterior.
   - Concluya.

P6. **[Propuesto]** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demuestre que para $\alpha < 3$, f es continua en $\mathbb{R}^2$. Hint: Para demostrar la continuidad en 0, acotando adecuadamente $|f(x,y)|$, puede serle útil recordar que

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ 2|ab| \leq a^2 + b^2$$

b) Muestre que para $\alpha \geq 3$, existe una sucesión $(x_n, y_n) \to (0,0)$ tal que $f(x_n, y_n) \not\to 0$. ¿Qué puede decir de la continuidad de f en este caso?

c) Sea el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3y^3 > x^2 + y^2\}$$

Muestre que A es un conjunto abierto.