Comentarios Aux 1

Por: Sebastián Bustos

Uno de sus compañeros menciono en la clase que el ejericio se podía abordar de otra manera. Considero que esa manera es una que vale mencionar por lo que les escribí este pequeño texto.

En la $P1$ parte 3 hay que calcular el limite de

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a_n^2+b_n^4}{|a_n|+3|b_n|},\frac{\cos(\pi^{a_n})(e^{b_n^2}-1)}{b_n^2}\right)$$

sabiendo que $(a_n, b_n) \longrightarrow (0,0)$.

Ahora para la primera componente del limite yo empece construyendome unas cotas convenientes hasta llegar a una expresión util.

Pero su compañero dijo (en forma condensada) que se podría utilizar que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|a|+|b|} &\leq \frac{1}{|a|}\\ \frac{1}{|a|+|b|} &\leq \frac{1}{|b|}\end{aligned}$$

Lo cual considero que es muy buena idea. Por lo que voy a hacer los calculos del limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n^2+b_n^4}{|a_n|+3|b_n|}$$

ocupando ese metodo.

En primer lugar sabemos que:

$$0 \leq \frac{2a_n^2+b_n^4}{|a_n|+3|b_n|} = \frac{2a_n^2}{|a_n|+3|b_n|} + \frac{b_n^4}{|a_n|+3|b_n|}$$

Por otro lado, utilizando lo que dijo su compañero tenemos estas dos desigualdades:

$$\begin{aligned}\frac{2a_n^2}{|a_n|+3|b_n|} &\leq \frac{2a_n^2}{|a_n|}\\ \frac{b_n^4}{|a_n|+3|b_n|} &\leq \frac{b_n^4}{3|b_n|}\end{aligned}$$

Ahora antes de simplificar tenemos que recordar que $\frac{a^2}{|a|} \neq a$ si $a < 0$. Por eso para asegurarnos de que estemos dividiendo por cosas consistentes vamos a utilizar una cota mas; mayoramos todo por su valor absoluto:

$$\begin{aligned}
\frac{2a_n^2}{|a_n| + 3|b_n|} &\leq \frac{2a_n^2}{|a_n|} \leq \frac{2|a_n|^2}{|a_n|} = 2|a_n| \\
\frac{b_n^4}{|a_n| + 3|b_n|} &\leq \frac{b_n^4}{3|b_n|} \leq \frac{|b_n^4|}{3|b_n|} = \frac{|b_n|^3}{3}
\end{aligned}$$

Asi juntando todo tenemos que:

$$0 \leq \frac{2a_n^2 + b_n^4}{|a_n| + 3|b_n|} = \frac{2a_n^2}{|a_n| + 3|b_n|} + \frac{b_n^4}{|a_n| + 3|b_n|} \leq 2|a_n| + \frac{|b_n|^3}{3}$$

Y con esto, por sandwich tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n^2 + b_n^4}{|a_n| + 3|b_n|} = 0$$