PAUTA AUX 1

P1.

1.1

a) notar

$$\|(x,y)\| = \sqrt{4x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{(2x)^2+y^2}$$
$$= \|(2x,y)\|_2$$

Probemos que es norma

a.1) $\|\cdot\| \geq 0$

$$\|(x,y)\| = \|(2x,y)\|_2 \geq 0$$

ya que $\|\cdot\|_2$ es norma

$\therefore \quad \|(x,y)\| \geq 0$ ✓

a.2) $\|(x,y)\| = 0 \iff (x,y) = \vec{0}$

ahora

$$\|(x,y)\| = 0 \iff \|(2x,y)\|_2 = 0$$

y $\|(2x,y)\|_2 = 0 \iff (2x,y) = 0$

ya que $\|\cdot\|_2$ es norma

$(2x,y) = 0 \iff \begin{matrix} 2x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \iff x = y = 0$

$\therefore \|(x,y)\| = 0 \iff x = y = 0 \iff (x,y) = 0$

a.3) $\|\lambda(x,y)\| = |\lambda| \cdot \|(x,y)\|$

$$\begin{aligned} \|\lambda(x,y)\| &= \|(\lambda x, \lambda y)\| \\ &= \|(2\lambda x, \lambda y)\|_2 \\ \overset{\|\cdot\|_2 \text{ es norma}}{} &= |\lambda| \cdot \|(2x,y)\|_2 \\ &= |\lambda| \cdot \|(x,y)\| \checkmark \end{aligned}$$

a.4) $\|(x,y) + (v,w)\| \leq \|(x,y)\| + \|(v,w)\|$

$$\begin{aligned} \|(x,y) + (v,w)\| &= \|(x+v, y+w)\| \\ &= \|(2(x+v), y+w)\|_2 \end{aligned}$$

$$= \| (2x + 2v, y + w) \|_2$$

$$= \| (2x, y) + (2v, w) \|_2$$

$\hookrightarrow \|\cdot\|_2$ es norma

$$\leq \| (2x, y) \|_2 + \| (2v, w) \|_2$$

$$= \| (x, y) \| + \| (v, w) \| //$$

$\therefore$ $\|\cdot\|$ es norma.

b) notemos que

$$\| \lambda (x, y) \| = \sqrt{|\lambda x| + |\lambda y|}$$

$$= \sqrt{|\lambda|} \cdot \sqrt{|x| + |y|}$$

$$= \sqrt{|\lambda|} \cdot \| (x, y) \|$$

$$\neq |\lambda| \cdot \| (x, y) \|$$

$\therefore$ no es norma.

c)

notemos que

$(x,y)=(0,-1)$ es tal que

$$\|(0,-1)\| = |0| + \sqrt[3]{(0)^3+(-1)^3}$$
$$= 0 + \sqrt[3]{0-1}$$
$$= 0 + \sqrt[3]{-1}$$
$$= -1 < 0$$

$\therefore$ $\|\cdot\|$ no es norma

d) notar que

$$\|(x,y)\| = \sqrt{(x-y)^2+y^2}$$
$$= \|(x-y,y)\|_2$$

veamos si es norma

d.1 - $\|(x,y)\| \geq 0$

como

$\|(x,y)\| = \|(x-y, y)\|_2$

y $\|\cdot\|_2$ es norma

$0 \leq \|(x-y, y)\|_2 = \|(x,y)\|$ ✓

d.2 - $\|(x,y)\| = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

$\|(x,y)\| = 0 \iff \|(x-y, y)\|_2 = 0$

$\|\cdot\|_2$ es norma $\iff (x-y, y) = (0,0)$

$\iff x - y = 0$
$y = 0$

$\iff x = y = 0$

$\iff (x,y) = (0,0)$ ✓

d. 3 − $\|\lambda(x,y)\| = |\lambda| \cdot \|(x,y)\|$

$$\|\lambda(x,y)\| = \|(\lambda x, \lambda y)\|$$
$$= \|(\lambda x - \lambda y, \lambda y)\|_2$$
$$= \|(\lambda[x-y], \lambda y)\|_2$$
$$= \|\lambda(x-y, y)\|_2$$

$\|\circ\|_2$ es norma
$$= |\lambda| \cdot \|(x-y, y)\|_2$$
$$= |\lambda| \cdot \|(x,y)\|$$

d. 4 − $\|(x,y)+(v,w)\| \leq \|(x,y)\| + \|(v,w)\|$

$$\|(x,y)+(v,w)\|$$
$$= \|(x+v, y+w\|$$
$$= \|(x+v-(y+w), y+w)\|_2$$
$$= \|(x-y+v-w, y+w)\|_2$$
$$= \|(x-y, y)+(v-w, w)\|_2$$

$\|\circ\|_2$ es norma
$$\leq \|(x-y, y)\|_2 + \|(v-w, w)\|_2$$

$= \|(x,y)\| + \|(v,w)\|$ ✓

$\therefore$ es norma

2)

a) $x_n = (e^{-n}\cos(n^2), e^{-n}\sin(n^2))$

que x_n converga es equivalente a que las coordenadas convergan

ahora

$\lim_n e^{-n} \cdot \cos(n^2)$

$e^{-n} \downarrow$ nula

$\cos(n^2) \downarrow$ acota

nula por acotada es nula $\therefore \lim_n e^{-n}\cos(n^2) = 0$

analogamente

$\lim_n (e^{-n}\sin(n^2)) \longrightarrow 0$

$\therefore x_n \longrightarrow (0,0)$

b) $x_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}, \frac{n^2+3^n}{n!}\right)$

analizando por componentes

$$\lim_{n} 1 - \cancel{\frac{1}{2^n}}^{\to 0} = 1$$

$$\lim_{n} \frac{n^2+3^n}{n!}$$

$$= \lim_{n} \cancel{\frac{n^2}{n!}}^{\to 0} + \underset{*}{\cancel{\frac{3^n}{n!}}}^{\to 0} = 0$$

$*$ recordar $\lim_{n} \frac{a^n}{n!} \to 0$ si $a \geq 0$

$\therefore \; x_n \to (1, 0)$

Scanned by CamScanner

c) $x_n = \left(\frac{1}{n}, (-1)^{n+1}, \frac{n+1}{n}\right)$

viendo por componentes

notamos que $(-1)^{n+1}$ no

converge $\therefore$ x_n no

converge

d) $x_n = (2^{-n}, 1+n)$

angolo al anterior

notamos que $1+n \longrightarrow +\infty$

$\therefore$ no converge, asi

x_n no convergen.

3)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2a_n^2+b_n^4}{|a_n|+3|b_n|},\ \frac{\cos(\pi^{a_n})(e^{b_n^2}-1)}{b_n^2}\right)$$

viendo la convergencia por coordenadas

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\pi^{a_n})\cdot\frac{(e^{b_n^2}-1)}{b_n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos(\pi^{a_n})\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{e^{b_n^2}-1}{b_n^2}$$

→ en caso que convergan

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\pi^{a_n})=\cos(\pi^{\lim a_n})$$

↓

Por continuidad

$$=\cos(\pi^0)$$

$$=\cos(1)$$

a su vez

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{b_m^2}-1}{b_m^2} \underset{\substack{\Downarrow\\ u=b_m^2}}{=} \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} \underset{\substack{\Downarrow\\ \text{conocido}}}{=} 1$$

- Hint: si no recuerda $\lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u}=1$ piense que son funciones y use l'hopital para calcularlo.

- Viendo la otra componente notemos

$$0 \leq \frac{2a_m^2+b_m^4}{|a_m|+3|b_m|} = \frac{2a_m^2}{|a_m|+3|b_m|} + \frac{b_m^4}{|a_m|+3|b_m|}$$

$$\leq \frac{2a_n^2 + 3|b_n|\cdot|a_n|}{|a_n| + 3|b_n|} + \frac{b_n^4 + |a_n|\cdot|b_n^3|}{|a_n| + 3|b_n|}$$

$$\leq \frac{2|a_n|\cdot|a_n| + 6|b_n|\cdot|a_n|}{|a_n| + 3|b_n|} + \frac{3b_n^4 + |a_n|\cdot|b_n|^3}{|a_n| + 3|b_n|}$$

$$= \frac{2|a_n|\left[\cancel{|a_n| + 3|b_n|}\right]}{\cancel{|a_n| + 3|b_n|}} + \frac{3b_n^4 + |a_n|\cdot|b_n|^3}{|a_n| + 3|b_n|}$$

$$= 2|a_n| + \frac{3b_n^4 + |a_n|\cdot|b_n|^3}{|a_n| + 3|b_n|}$$

$$\leq 2|a_n| + \frac{3|b_n|^3\cdot|b_n| + |a_n|\cdot|b_n|^3}{|a_n| + 3|b_n|}$$

$$= 2|a_n| + |b_n|^3 \cdot \cancelto{1}{\frac{3|b_n| + |a_n|}{|a_n| + 3|b_n|}}$$

$$= 2|a_n| + |b_n|^3$$

Scanned by CamScanner

$$\therefore \quad 0 \leq \frac{2a_n^2 + b_n^4}{|a_n| + 3|b_n|} \leq 2|a_n| + |b_n|^3$$

Por sandwich como

$$\lim_{n} 2|a_n| + |b_n|^3 \longrightarrow 0$$

$$\frac{2a_n^2 + b_n^4}{|a_n| + 3|b_n|} \longrightarrow 0$$

asi el limite es $(0, \cos(1))$

$\boxed{P_2}$

a)

a.1) $\|A\|_\infty \geq 0$

como $\|\cdot\|$ es norma

$\|A\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \sup\limits_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| \geq 0$

$\rightarrow \|A\|_\infty = \sup\limits_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| \geq 0$

así $\|A\|_\infty \geq 0$

a.2) $\|A\|_\infty = 0 \Leftrightarrow A = 0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Por doble implicancia

$\boxed{\Leftarrow}$ $A=0 \Rightarrow \|A\|_\infty = 0$

como $A=0 \Rightarrow Ax=0 \; \forall x \in \mathbb{R}^3$

así $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 0$.

y por ende $\|A\|_\infty = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\|A\|_\infty = 0 \Rightarrow A=0$

como $\|A\|_\infty = 0$ entonces

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = 0$$

entonces $\|Ax\| = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^3$ tal que

$\|x\| = 1$

y como $\|\cdot\|$ es norma

$\Rightarrow Ax = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ T.q $\|x\| = 1$

sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $x = \dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$

$$\Rightarrow A \cdot \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow A \cdot \bar{x} = 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

si re cordamos la multi-plicación de matrices con vectores y tomamos $\bar{x} = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ donde el 1 esta en la posición 'i'

notamos $A\bar{x}$ nos da la colum-na i-esima de la matriz

$\therefore$ la columna i-esima es cero en todos sus componentes
Tomando $i=1,\dots,n$ Tenemos que

$A = 0 \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$

$\therefore \|A\|_\infty = 0 \Rightarrow A = 0$

a.3) $\|\lambda A\|_\infty = |\lambda| \cdot \|A\|_\infty$

$$\|\lambda A\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda A x\|$$

$\|\cdot\|$ es norma

$$= \sup_{\|x\|=1} |\lambda| \cdot \|Ax\|$$

$$= |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

$$= |\lambda| \cdot \|A\|_\infty$$

a.4) $\|A+B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$

$$\|A+B\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\|$$

recordar $\sup a+b \leq \sup a + \sup b$

así $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\|$

$$\leq \|Ax\| + \|Bx\|$$

por $\|\cdot\|$ norma y a su vez

$$\underbrace{\sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\|}_{= \|A+B\|_\infty} \leq \sup_{\|x\|=1}\left[\|Ax\| + \|Bx\|\right]$$

$$\leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|$$

$\therefore$ $\|A+B\|_\infty \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|$

$$= \|A\|_\infty + \|B\|_\infty \; //$$

así $\|\cdot\|_\infty$ es norma.

b) $\|Ax\| \leq \|A\|_\infty \|x\|$

notamos

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

$$= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ x \neq 0}} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\|$$

$$\geq \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\|$$

$$\rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|_\infty$$

así $\|Ax\| \leq \|A\|_\infty \cdot \|x\|$

c) $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$

$$\|AB\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\|$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \|A \cdot (Bx)\|$$

$$\leq \sup_{\|x\|=1} \|A\|_\infty \cdot \|Bx\| \text{ ; ya que } Bx \in \mathbb{R}^3$$

$$= \|A\|_\infty \cdot \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|$$

$$= \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty //$$

- si A es invertible

Tomemos $B = A^{-1}$

así

$$\|A \cdot A^{-1}\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

- así $(\|A\|_\infty)^{-1} \cdot \|I\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty$

$$\|I\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \|I \cdot x\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

así $(\|A\|_\infty)^{-1} \leq \|A^{-1}\|_\infty //$

d)

ahora demostremos $|||x||| = ||Ax||$ es norma

d1) $|||x||| \geq 0$

$|||x||| = ||Ax|| \geq 0$

$\Downarrow$

$||\cdot||$ es norma

d2) $|||x||| = 0 \iff x = 0$

$\Leftarrow$ $x = 0 \Rightarrow |||x||| = 0$

si $x = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow ||Ax|| = 0$

$\Rightarrow |||x||| = 0$

$\Rightarrow$ $|||x||| = 0 \Rightarrow x = 0$

$|||x||| = 0 \Rightarrow ||Ax|| = 0$

$\Rightarrow Ax = 0$ ya que

$\|\cdot\|$ es norma.

como A es inversible

$\rightarrow \quad A \cdot A \cdot x = A \cdot 0 = 0$

$\rightarrow \quad A^2 \cdot x = 0$

$\rightarrow \quad I \cdot x = 0$

$\rightarrow \quad x = 0$

$\therefore \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ✓

d3) $\quad |||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$

$$
\begin{aligned}
|||\lambda x||| &= \|A \lambda x\| \\
&= \|\lambda A x\| \\
&= |\lambda| \cdot \|A x\| \quad , \|\cdot\| \text{ es norma} \\
&= |\lambda| \cdot |||x||| \ \checkmark
\end{aligned}
$$

Scanned by CamScanner

d.4) $|||x+y||| = ||A(x+y)||$

$= ||Ax + Ay||$

$||\cdot||$ es norma

$\leq ||Ax|| + ||Ay||$

$= |||x||| + |||y|||$

e) $(||A||_\infty)^{-1} ||x|| \leq |||x||| \leq ||A||_\infty ||x||$

notemos

$|||x||| = ||Ax|| \leq ||A||_\infty ||x||$

Por b

así $|||x||| \leq ||A||_\infty ||x||$

notemos que

$||x|| = ||A^2 \cdot x|| = ||A(Ax)|| \leq ||A||_\infty \cdot ||Ax||$

y así tenemos.

Scanned by CamScanner

$$(\|A\alpha\|)^{-1} \cdot \|x\| \leq \|Ax\| = \|\|x\|\|$$

y se cumple lo pedido.

P3

a)

S_n converge entonces $x_n \to 0$

notar

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

$$= S_n - S_{n-1}$$

y como S_n converge llamemoslo S

así $S_n \to S$ y $S_{n-1} \to S$

$$\Rightarrow \lim x_n = \lim S_n - S_{n-1}$$

$$= S - S$$

$$= 0$$

analizando

$$c_n = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

$$= \underbrace{\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} x_i}_{S} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

$$= S - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

$$c_n = S - S_{n-1}$$

$$\lim c_n = \lim S - S_{n-1}$$

$$= S - S$$

$$= 0$$

$\therefore c_n \to 0$

b) Si α_n converge entonces β_n y S_n convergen

consideremos $\alpha_n \to \alpha$

$\alpha_n \to \alpha \Rightarrow \beta_n$ converge

$$\beta_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=n}^{k} \|x_i\|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| - \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| - \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \alpha_k - \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|$$

$$= \alpha - \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \beta_n = \alpha - \lim_{n\to\infty} \alpha_{n-1}$$

$$= \alpha - \alpha = 0$$

así $\beta_n \to 0$

P.d.q S_n converge

mostremos que es de cauchy

es decir

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0 \quad \| S_n - S_m \| \leq \varepsilon$

o analogamente

$\| S_n - S_m \| \to 0$

$$\| S_n - S_m \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \text{ ; spg } n > m$$

$\|\cdot\|$ norma

$$\leq \sum_{i=m+1}^{n} \| x_i \|$$

$$\|S_n - S_m\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|$$

$$= \alpha_n - \alpha_m$$

$$\leq |\alpha_n - \alpha_m|$$

$$\leq \varepsilon$$

Ya que α_n converge $\therefore$ es de cauchy y entonces

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 \; |\alpha_n - \alpha_m| \leq \varepsilon$

de esta forma

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 \; \|S_n - S_m\| \leq \varepsilon$

y asi S_n es de cauchy

y entonces converge//