Auxiliar 1

Normas y limites de sucesiones

Profesor: Ángel Pardo
Auxiliares: Felipe López y Sebastián Bustos

P1. Calentando motores

1. Verifique si las siguientes aplicaciones son norma en $\mathbb{R}^2$
   a) $||(x,y)|| = \sqrt{4x^2+y^2}$
   b) $||(x,y)|| = \sqrt{|x|+|y|}$
   c) $||(x,y)|| = |x| + \sqrt[3]{x^3+y^3}$
   d) **[Propuesto]** $||(x,y)|| = \sqrt{(x-y)^2+y^2}$
2. Decida si los siguientes limites son convergentes o no. En caso de serlos, indique su límite.
   a) $\vec{x_n} = (e^{-n}\cos(n^2), e^{-n}\sin(n^2))$
   b) $\vec{x_n} = (1-\frac{1}{2^n}, \frac{n^2+3^n}{n!})$
   c) $\vec{x_n} = (\frac{1}{n}, (-1)^{n+1}, \frac{n+1}{n})$
   d) **[Propuesto]** $\vec{x_n} = (2^{-n}, 1+n)$
3. Calcule el siguiente limite, sabiendo que $(a_n, b_n) \to (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a_n^2+b_n^4}{|a_n|+3|b_n|}, \frac{\cos(\pi^{a_n})(e^{b_n^2}-1)}{b_n^2}\right)$$

P2. Sea $||\cdot||$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Para $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se define:

$$||A||_\infty = \sup_{||\vec{x}||=1} ||A\vec{x}||$$

a) Pruebe que $||\cdot||_\infty$ es una norma para el espacio vectorial $M_{n\times n}(\mathbb{R})$
b) Pruebe que $||Ax|| \leq ||A||_\infty \cdot ||x||$
c) Demuestre que si B es cualquier otra matriz entonces $||AB||_\infty \leq ||A||_\infty ||B||_\infty$. Concluya que si A es invertible entonces $||A^{-1}||_\infty \geq (||A||_\infty)^{-1}$

   Suponga que A es invertible y que $A^2 = I$.

d) **Propuesto** Pruebe que $|||\vec{x}||| = ||A\vec{x}||$ define otra norma en $\mathbb{R}^n$.
e) Demuestre que la nueva norma cumple:

$$(||A||_\infty)^{-1}||\vec{x}|| \leq |||\vec{x}||| \leq ||A||_\infty||\vec{x}||$$

P3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $||\cdot||$ una norma cualquiera. Definimos las siguientes sucesiones:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} ||x_i|| \quad , \quad c_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=n}^{k} x_i \quad , \quad \beta_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=n}^{k} ||x_i||$$

a) Demuestre que si s_n converge, entonces x_n y c_n convergen a $0 \in \mathbb{R}^n$.

b) Demuestre que si α_n converge, entonces β_n y s_n convergen. Hint: Para s_n pruebe que es de Cauchy y concluya.

P4. [Propuesto]

a) Sean $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{b_k\}_{k\in N}$ dos sucesiones en $\mathbb{R}^n$ tales que:

$$a_k \to a \quad , \quad (a_k + b_k) \to c$$

Muestre que entonces la sucesión $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

b) Si $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$. Muestre que si $||\cdot||'$ y $||\cdot||''$ son normas equivalentes entonces el limite es independiente de la norma elegida.

c) Sea $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices de $n \times n$ con coeficientes reales. Demuestre que:

$$||A|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2}$$

Es norma del espacio. Hint: Recuerde la desigualdad de Cauchy-Schwartz

Resumen

Norma: $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice norma si cumple:

1. (Positiva) $||x|| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
2. $||x|| = 0 \iff x = 0 \in \mathbb{R}^n$
3. (Escalable) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
4. (Desigualdad triangular) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

Normas usuales:

1. (Euclideana) $||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
2. (Supremo) $||x||_\infty = \sup_{i=\{1,..,n\}} |x_i|$
3. $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

La norma Euclideana cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||_2 \cdot ||y||_2$

Normas equivalentes: Dos normas $||\cdot||'$ y $||\cdot||''$ se dicen equivalentes si existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$c_1||x||' \leq ||x||'' \leq c_2||x||'$$

Para todo valor de x.

Teorema 1: Todas las normas son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2: Una sucesión $x_k \in \mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ ssi $(x_k)^{(i)}$ converge a $x^{(i)}$,con $i = \{1, ..., n\}$.

Teorema 3 - (Bolzano-Weierstrass): Toda sucesión acotada posee al menos una sub-sucesión convergente.

Sucesiones de Cauchy: x_n se dice de Cauchy si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \; ||x_n - x_m|| \leq \epsilon$$

Teorema 4: En $\mathbb{R}^n$ una sucesión es convergente ssi es de cauchy.

Teorema 5: Si las normas son equivalentes el limite de la sucesión no cambia.

Teorema 6: El algebra de limites de sucesiones es la mimsma que en $\mathbb{R}$.