Guía 5 - Cálculo en Varias Variables - Otoño 2019
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Profesor: Matías Godoy C.
Auxiliares: Nicolás Cornejo, Cristian Palma, Arie Wortsman

Pregunta 1. Considere el dominio $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Calcule

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

en los casos: $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $f(x, y) = xy(x + y)$.

Pregunta 2. Considere $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}$. Calcule

$$A(D) := \int_D 1dxdy$$

Pregunta 3. Considere $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$. Calcule

$$\int_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}dxdy$$

Pregunta 4. Calcule

$$\int_D xdxdydz$$

donde $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$.

Pregunta 5. Calcule $\int_D f(x, y, z)dxdydz$ para

a) $f(x, y, z) = \cos x$ y $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.
b) $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq a^2, \ 0 < z < a\}$.

Pregunta 6. Calcule usando coordenadas polares

$$\int_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2}dxdy$$

donde $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.

Pregunta 7. Sea $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

a) Muestre que D es un disco.
a) Calcule

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$$

Pregunta 8. Calcule

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

para las siguientes regiones y funciones, utilizando los cambios de variable sugeridos (verifique las hipótesis necesarias):

a) $f(x, y) = xy$, $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \geq 0, x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}$. Tome $x = r\cos^3\theta, y = r\sin^3\theta$, $r \geq 0$.
a) $f(x, y) = (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)$, $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1\}$. Tome $u = xy$, $v = y^2 - x^2$ y suponga $a > 0$.

Pregunta 9. Sea $\mathcal{E}^{++} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Calcule

$$\int_{\mathcal{E}^{++}} (2x^3 - y) dx dy$$

para ello, considere la transformación en coordenadas elípticas dada por $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$.

Pregunta 10. Calcule

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} dx dy dz$$

con $a \neq 0$.

Pregunta 11.

a) Calcule la integral

$$\iint_{\mathcal{D}} xy dx dy$$

donde $\mathcal{D}$ es la región delimitada por las parábolas: $y = x^2 + 4$, $y = x^2$, $y = 6 - x^2$ y $y = 12 - x^2$.

b) Calcule la integral

$$\iint_{\mathcal{D}} x^2 y^2 dx dy$$

donde $\mathcal{D}$ es la región delimitada por las hipérbolas: $xy = 1$, $xy = 2$ y las líneas rectas $y = x$, $y = 4x$.

Pregunta 12.

a) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, con $A \subset R \times [a,b]$, donde $R \subset \mathbb{R}^2$ y $[a,b] \subset \mathbb{R}$ son intervalos. Suponga que:

$$A_t = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ (x,t) \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

es medible para cada $t \in [a,b]$, escribamos $A(t) = \text{Área}(A_t)$. Entonces:

$$\text{Volumen}(A) = \int_a^b A(t) dt$$

Este resultado se conoce como el 'Principio de Cavalieri'.

b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea A el conjunto de $\mathbb{R}^3$ obtenido al rotar en torno al eje OX el gráfico de f. Pruebe que:

$$\text{Volumen}(A) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Deduzca de esto que el volumen de una esfera es $4/3\pi r^3$.

Pregunta 13.

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$. Pruebe que se tiene:

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz = 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr$$

deduzca que el volumen de una esfera de radio R es $\frac{4}{3}\pi R^3$.

b) Considere el elipsoide $\mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$. Pruebe que su volumen es $\frac{4}{3}\pi abc$.

<u>Indicación</u>: Busque una transformación que lleve una bola en un elipsoide.

c) Calcule el volúmen de la región $\mathcal{S}$ descrita por:

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq b^2,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ z \geq 0,\ 0<a<b\}$$

Pregunta 14. Sea

$$I := \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

a) Muestre que para todo $x \in (-1,+\infty)$ se tiene:

$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy}dy$$

deduzca que

$$\int_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy$$

donde $D := [0,1] \times [0,1]$.

b) Invirtiendo los roles de x e y, muestre que

$$2I = \int_D \frac{(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$$

y deduzca que $I = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

Pregunta 15. Consideremos una matriz simétrica y definida positiva $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y sea la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^\top \Sigma^{-1} x\right).$$

Probaremos que $\int_{\mathbb{R}^n} f = \sqrt{\det(2\pi\Sigma)}$. En lo que sigue asuma que f es integrable sobre todo el espacio. Siga los siguientes pasos.

a) Recuerde que como Σ es simétrica, existe una matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\Sigma = Q^\top \Lambda Q$, donde Λ es la matriz diagonal de valores propios de Σ. Pruebe que

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^\top \Sigma^{-1} x\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(Qx)^\top \Lambda^{-1} (Qx)\right).$$

Recuerde que Q es ortogonal si $Q^\top Q = I$, donde I es la matriz identidad.

b) Usando el cambio de variables $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $T(y) = Q^\top y$, pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{y_j^2}{2\lambda_j}\right)\mathrm{d}y.$$

c) Concluya el valor de la integral de f, y para ello puede usar lo siguiente: para todo $\alpha > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\alpha}\right)\mathrm{d}w = \sqrt{2\pi\alpha}.$$