

Guía 4 - Cálculo en Varias Variables - Otoño 2019

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Profesor: Matías Godoy C.

Auxiliares: Nicolás Cornejo, Cristian Palma, Arie Wortsman

Nota: Los problemas de optimización con y sin restricciones han sido recopilados por el profesor Alexis Fuentes.

Pregunta 1. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por la fórmula

$$f(x, y) = x^{2n+1}y + xy^{2m+1} + xy,$$

donde n y m son números naturales distintos de cero. Encontrar los puntos críticos de f y demostrar que en realidad existe sólo uno. Clasifique tal punto.

Pregunta 2. Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, diremos que x es un **vector de probabilidad** si y sólo si $x_i > 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $x_1 + \dots + x_n = 1$. Es decir, es un vector cuyas coordenadas son estrictamente positivas y suman 1. Denotemos por $\mathcal{P}_n$ el conjunto de los vectores de probabilidad en $\mathbb{R}^n$, para $x \in \mathcal{P}_n$ se define su **Entropía** como

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n x_i \log_2(x_i).$$

Usar la técnica de los multiplicadores de Lagrange para demostrar que la entropía se maximiza para el caso uniforme $x = (1/n, \dots, 1/n)^t$.

Pregunta 3. Se define la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \ln(x) + \ln(y) + 3 \ln(z) \quad \text{donde } x > 0, y > 0, z > 0$$

a) Sea $r > 0$ un real fijo, encontrar el valor máximo de la función f sobre el conjunto

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

b) Usando el resultado anterior, demuestre que para números reales positivos a, b, c se satisface la siguiente desigualdad

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5.$$

Pregunta 4. Una empresa usa fibra de lana y algodón para producir tela. La cantidad de tela producida está dada por la función

$$Q(x, y) = xy - x - y + 1, \quad x > 1, y > 1,$$

donde x denota el número de kilos de lana e y el número de kilos de algodón. Si la lana cuesta l dólares por kilo y el algodón, a por kilo y la empresa quiere gastar T dólares en material. Determinar la proporción de algodón y lana de manera tal de producir la mayor cantidad de tela posible.

Ind: Puede ser más cómodo reducir a un problema de una sola variable.

Pregunta 5. Encontrar la máxima y mínima distancia al origen de la curva dada por

$$2x^2 + 3xy + 2y^2 = 0.$$

Pregunta 6. Demostrar que la caja de volumen máximo que puede ser colocada dentro de una esfera de radio R es un cubo. Encontrar las dimensiones y el volumen de dicho cubo.

Pregunta 7. Hallar todos los puntos críticos de la función

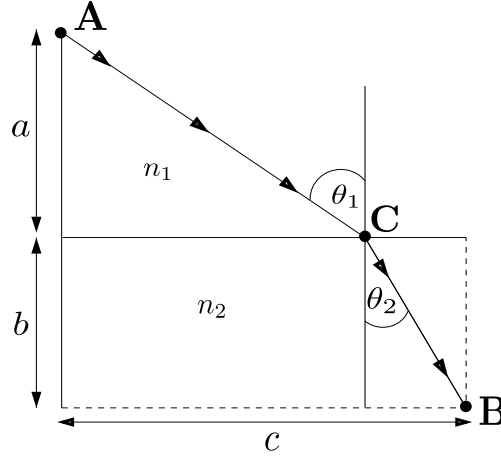
$$f(x, y) = \sin(x) + y^2 + 2y \cos(x) + 1,$$

y utilizar el criterio de segundo orden para clasificarlos si es posible.

Pregunta 8. Ley de Snell.

Suponga que hay dos tipos de medios transparentes separados por una línea gruesa. Dentro del primero (arriba) la velocidad de la luz es $\frac{c}{n_1}$, mientras que en el segundo (abajo) es $\frac{c}{n_2}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Los números n_1 y n_2 son los llamados índices de refracción. Por simplicidad supondremos que $c = 1$ y $n_2 > n_1$. Dados dos puntos A y B en el medio 1 y 2 respectivamente (como en la figura), donde a, b, c pueden ser considerados fijos, la idea de este problema es encontrar la relación entre θ_1, θ_2, n_1 y n_2 para que el **tiempo de viaje** entre A y B sea mínimo. Para ello

- (a) Plantear el problema de optimización correspondiente.
- (b) Si (θ_1, θ_2) es solución, demostrar que $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$.



Pregunta 9. Si α, β y γ son los ángulos interiores de un triángulo, demostrar que

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{1}{8}.$$

Pregunta 10. Sea $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ definida por

$$u(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\beta_i}}{\beta_i}$$

donde $\beta_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$ tal que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} = 1$. Determine los puntos críticos y calcule el valor de la función en cada uno de ellos.

Pregunta 11. Mínimos Cuadrados.

Considere un conjunto de **datos** en $\mathbb{R}^2$, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$. El objetivo de este problema es buscar una recta que se ajuste globalmente a los datos sin que coincida necesariamente con alguno de ellos. Si proponemos como $y = \beta_1 + \beta_2 x$ a la recta de ajuste, el criterio consiste en minimizar la suma de los errores cuadráticos, es decir

$$\min_{\beta_1, \beta_2} Q := \min_{\beta_1, \beta_2} \left(\sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_1 + \beta_2 x_i))^2 \right).$$

- (a) Demostrar que al aplicar la condición de primer orden al problema, se obtienen las llamadas **ecuaciones normales**

$$\bar{y} = \beta_1 + \beta_2 \bar{x}.$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \beta_1 n \bar{x} + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

donde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

- (b) Bajo la siguiente hipótesis

$$(1) \quad \bar{x} < \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

encuentre el candidato a mínimo $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, en función de los datos. Interprete la condición (1).

- (b) Use la condición de segundo orden para probar que $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ es un mínimo de Q .

Pregunta 12. Un triángulo con lados a, b, c tiene un perímetro fijo definido por $2s = a + b + c$. Su área está dada por la **Fórmula de Herón**

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Utilice la técnica de los multiplicadores de Lagrange para mostrar que, entre todos los triángulos de perímetro dado, el de mayor área es el equilátero.

Ind: Observe que si $f \geq 0$, entonces f y f^2 tienen los mismos puntos extremos.

Pregunta 13. Utilizar la técnica de los multiplicadores de Lagrange, para calcular el máximo valor de la función

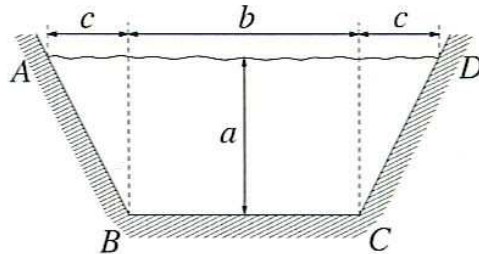
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i.$$

$$s.a \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{i^2} = 1.$$

Pregunta 14. Se necesita construir un canal de sección trapezoidal por el cual fluya un caudal constante $Q = 32[m^3/s]$. Se sabe que el costo de su construcción $Costo(a, b, c)$ es proporcional al perímetro mojado del caudal, es decir existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$Costo(a, b, c) = \beta(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD})$$

y que el caudal $Q = 2 \cdot \text{área}$. Encuentre el diseño óptimo del canal, que minimiza el costo de construcción y cumple con el requerimiento técnico. Ver figura como apoyo **Pregunta 15.** Sea



A, B, P reales positivos tales que $P \leq A + B$. Considere el conjunto:

$$\Omega = \{ (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : P = A \cos \theta_1 + B \cos \theta_2 \}.$$

Formular el problema de optimización correspondiente para demostrar que:

$$A \sin \theta_1 + B \sin \theta_2 \leq \sqrt{(A+B-P)(A+B+P)}, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \Omega.$$

Pregunta 16. Demostrar la siguiente desigualdad

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(abc)^{2/3} \quad \forall a, b, c \text{ reales positivos.}$$

Usando multiplicadores de Lagrange. Para ello, muestre que basta probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \quad \forall a, b, c \text{ reales positivos tales que } abc = 1.$$

Pregunta 17. Calcular y clasificar, en caso de existir, los puntos críticos de las siguientes funciones

(a) $f(x, y, z) = x(y+z)$ tal que $x^2 + y^2 = 1$ y $xz = 1$.

(b) $f(x, y) = x + y^2$ tal que $2x^2 + y^2 = 1$.

Pregunta 18. Calcular los extremos relativos y los puntos sillar para las funciones

(a) $f(x, y, z) = \cos(x) \cosh(y)$.

(b) $f(x) = \sum_{i=0}^m \|x - c_i\|^2$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $c_i \in \mathbb{R}^n$ para $i = 1, \dots, m$.

Obs: En esta parte se considera la norma euclídeana en $\mathbb{R}^n$.

(c) $f(x, y) = x$ tal que $x^2 + 2y^2 = 3$.

Pregunta 19. Estimación de parámetros en Estadística.

La función de densidad de una variable aleatoria X que tiene distribución normal se define como

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad -\infty < x < \infty.$$

Donde μ es la media y σ^2 es la varianza de X . El objetivo de este problema es estimar los parámetros μ y σ bajo un criterio de maximización, cuando se realiza un conjunto de observaciones $\{x_1, \dots, x_n\}$ hechos desde una distribución normal X . Definamos la función de verosimilitud:

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i).$$

(a) Encuentre explícitamente $L(\mu, \sigma)$.

(b) Maximice $\ln(L(\mu, \sigma))$. Es decir, encuentre $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ que maximizan la función $\ln(L(\mu, \sigma))$. Tanto $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ dependen sólo de $\{x_1, \dots, x_n\}$.

(c) Demuestre que el punto $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ encontrado es un máximo. Para ello debe verificar que el Hessiano del problema es definido negativo en tal punto.

Obs: Este procedimiento en Estadística se conoce como el método de máxima verosimilitud, y a los parámetros $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ obtenidos se llaman estimadores de máxima verosimilitud. **Pregunta 20.** Notemos por $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$. Sea $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida como $f(x) = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ para cada $x = (x_1, \dots, x_n)$ (es decir, el producto de la componentes de x). Definamos el conjunto S de restricciones como

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}.$$

(a) Demostrar que es equivalente maximizar f restringida a S que maximizar $\ln(f)$ restringida a S (equivalencia en el sentido que ambos problemas tienen los mismos puntos de máximo).

Ind: La función logaritmo natural es creciente.

(b) Usando la parte (a) y la técnica de los multiplicadores de Lagrange, probar que $f(x) \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n$. Verifique que el punto encontrado es un máximo.

- (c) De lo anterior, deduzca que la media aritmética de n números positivos excede su media geométrica, es decir

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}.$$

Ind: Para $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vector de S defina $a = (a_1, \dots, a_n)$ como:

$$a_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j} \quad i = 1, \dots, n.$$

muestre que a está en S y con ello concluya.

Pregunta 21. Economía.

Un agente enfrenta la opción de comprar n bienes a precios $p_1, \dots, p_n$ donde cada precio $p_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ son datos. El individuo modela la utilidad que le reporta adquirir una canasta de bienes de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto u(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Donde u se llama función de utilidad, de esta manera si el individuo posee una canasta $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es decir, x_i unidades del bien i , $i = 1, \dots, n$, éste la valora en $u(x_1, \dots, x_n)$. Además considere que la función de utilidad u satisface la condición $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0 \forall i = 1, \dots, n$, es decir comprar más aumenta la utilidad. Suponga que el individuo posee un ingreso $w > 0$ y pretende maximizar su utilidad entre las canastas que puede comprar.

- Plantear el problema que enfrenta el consumidor.
- Argumentar que la solución del problema satisface la restricción con igualdad, y de este modo, es equivalente a resolverlo con la restricción satisfaciendo esta condición.
- Determinar las condiciones de primer orden del problema con restricción de igualdad.
- Finalmente, encontrar las cantidades x_i , $i = 1, \dots, n$, que decide adquirir el individuo en función de $p_1, \dots, p_n$ y w , para el caso

$$u(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{con} \quad \alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\text{y} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Pregunta 22. Sean $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ números reales en el intervalo $[0, 1]$. Se pide determinar el máximo valor de la siguiente suma:

$$S = x_1(1 - x_1) + x_2(1 - x_2) + \cdots + x_{100}(1 - x_{100})$$

Ind: Primero estudiar el problema $\max_{x \in [0, 1]} x(1 - x)$ para tener una idea.

Pregunta 23.

- a) Sea f una función continua sobre un rectángulo $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$. Demuestre que:

$$\left(\min_{(x, y) \in \mathcal{R}} f(x, y) \right) \cdot A(\mathcal{R}) \leq \int_{\mathcal{R}} f \leq \left(\max_{(x, y) \in \mathcal{R}} f(x, y) \right) \cdot A(\mathcal{R})$$

- b) Si $f(x, y) = e^{\sin(x+y)}$ y $\mathcal{R} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, muestre que:

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{R}} f \leq e$$

Pregunta 24. Sea U un abierto en $\mathbb{R}^3$ y sea $p \in U$. Sea g una función continua en U . Sea V_r el volumen de una bola de radio r . Sea $B(p, r)$ la bola centrada en p y de radio r . Pruebe que se tiene:

$$g(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V_r} \int_{B(p, r)} g$$

Indicación: Recuerde que: $\int_{B(p,r)} 1 = V_r$

Pregunta 25. Sea $\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N] \subset \mathbb{R}^N$ un rectángulo, y sea S_n un reticulado dado por la familia de rectángulos de la forma

$$R_{k_1 \dots k_N} = \left[a_1 + \frac{(k_1 - 1)(b_1 - a_1)}{n}, a_1 + \frac{k_1(b_1 - a_1)}{n} \right] \times \dots \times \left[a_N + \frac{(k_N - 1)(b_N - a_N)}{n}, a_N + \frac{k_N(b_N - a_N)}{n} \right]$$

donde $k_j = 1, \dots, n$ para $j = 1, \dots, N$.

Para una función continua $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definamos:

$$S_n^*(f) = \sum_{k_1, \dots, k_N=1}^n f \left(a_1 + \frac{k_1(b_1 - a_1)}{n}, \dots, a_N + \frac{k_N(b_N - a_N)}{n} \right) \cdot \text{Vol}(R_{k_1 \dots k_N})$$

Demuestre que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*(f) = \int_{\mathcal{R}} f$$

Pregunta 26.

a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Considere la región

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

Pruebe que:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$

b) Calcule la integral iterada

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx \right) dy$$

Pregunta 27.

a) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, con $A \subset R \times [a, b]$, donde $R \subset \mathbb{R}^2$ y $[a, b] \subset \mathbb{R}$ son intervalos. Suponga que:

$$A_t = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x, t) \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

es medible para cada $t \in [a, b]$, escribamos $A(t) = \text{Área}(A_t)$. Entonces:

$$\text{Volumen}(A) = \int_a^b A(t) dt$$

Este resultado se conoce como el ‘Principio de Cavalieri’.

b) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea A el conjunto de $\mathbb{R}^3$ obtenido al rotar en torno al eje OX el gráfico de f . Pruebe que:

$$\text{Volumen}(A) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Deduzca de esto que el volumen de una esfera es $4/3\pi r^3$.

Pregunta 28. El propósito de esta pregunta es probar la llamada regla de Leibniz, que dice: dada $g(x, y)$ de clase C^1 , se tiene que la derivada de la función de una variable:

$$F(x) = \int_a^b g(x, t) dt \quad \text{es} \quad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt.$$

Para probar esto se propone lo siguiente:

- a) Considere la siguiente integral iterada:

$$\int_c^x \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(s, t) dt ds$$

y utilizando el Teorema de Fubini más el Teorema Fundamental del Cálculo concluya.

- b) Una aplicación clásica de este resultado es el cálculo de integrales de una variable de funciones que no poseen primitiva en términos de funciones elementales (recuerden que TODA función continua de una variable posee primitiva!). Por ejemplo, para calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Siga los siguientes pasos:

- b.1) Considere las funciones:

$$A(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2 \quad B(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx$$

Pruebe que estas satisfacen: $A'(t) + B'(t) = 0$

- b.2) Deduzca que $A(t) + B(t) = \pi/4$

- b.3) Pruebe que $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ y concluya el resultado.

Pregunta 29.

- a) Sea

$$I = \int_0^1 \int_w^1 \int_y^1 \sin(x^3) dx dy dw$$

Escriba I como una integral iterada de la forma $\iiint \dots dy dx dw$ y deduzca que:

$$I = \int_0^1 \int_w^1 (x - w) \sin(x^3) dx dw$$

Escriba la integral resultante como $\iint \dots dw dx$ y calcule I .

- b) Sea $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Se sabe que la integral $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ se puede escribir como la integral iterada $\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx$. Esboce la región $\mathcal{D}$ e intercambie el orden de integración en la integral iterada.