Guía 3 - Cálculo en Varias Variables - Otoño 2019
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Profesor: Matías Godoy C.
Auxiliares: Nicolás Cornejo, Cristian Palma, Arie Wortsman

Pregunta 1.

a) Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice homogénea de grado m si satisface:

$$f(tx) = t^m f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0$$

Demuestre que si f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y homogénea de grado m, entonces:

$$f(x) = \frac{1}{m}\langle \nabla f(x), x\rangle,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Indicación: Derive 'de dos formas distintas' la función $\phi(t) = f(tx)$.

b) Suponga ahora que f es de clase $\mathcal{C}^2$ y es homogénea de grado 2. Pruebe que:

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle \nabla H_f(0)x, x\rangle,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde $H_f(p)$ es la matríz Hessiana de f en el punto p.

Pregunta 2. Considere la superficie $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 - z = 0\}$.

a) Encuentre el plano tangente a S en el punto $(0, -\pi, \pi^2)$.

b) Considere la curva Γ dada por la parametrización $\sigma(t) := (t \sin t, t \cos t, t^2)$. Pruebe que $\Gamma \subset S$ y que pasa por $(0, -\pi, \pi^2)$. ¿Para cual t ocurre esto útlimo?

c) Encuentre la distancia mínima de $(3, 0, 0)$ a S. Determine el punto donde se alcanza.

Pregunta 3. Dados $a, b, c > 0$, considere la superficie dada por $\mathcal{E}^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1,\ z \geq 0\}$. Pruebe que dado $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}^+$, el plano tangente a $\mathcal{E}^+$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

Pregunta 4. Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se dice **conexo por caminos** si para todo par de puntos $x, y \in \Omega$ existe una función $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ diferenciable en $[0, 1]$ tal que:

$$\gamma(0) = x,\quad \gamma(1) = y,\quad \text{y } \gamma(t) \in \Omega\quad \forall t \in [0, 1]$$

esto es, un *camino diferenciable* que une los puntos x e y dentro de Ω.
Demuestre que si Ω es conexo por caminos y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable en Ω y satisface:

$$\nabla f(x) = 0\quad \forall x \in \Omega$$

entonces f es constante. De un contraejemplo a esta afirmación si Ω no es conexo por caminos.
Indicación: Fije un punto $x_0 \in \Omega$ y considere para $y \in \Omega$ un camino diferenciable $\gamma(t)$ con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = y$. Estudie $\phi(t) = f(\gamma(t))$.

Pregunta 5. Dada una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definimos su **Laplaciano** como la traza de la matriz Hessiana, es decir:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Se define además la **Ecuación de Laplace** a la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$\Delta u = 0$$

Nuestro objetivo, es determinar una solución para la ecuación de Laplace cuando la función u presenta simetría radial, es decir:

$$u(x) = u(x_1, \ldots, x_N) = v(r), \quad r = ||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}$$

Para ello se le pide:

a) Pruebe que, si u tiene simetría radial entonces:

$$\Delta u(x) = v''(r) + \frac{N-1}{r} \cdot v'(r)$$

b) Deduzca, a partir de lo anterior, que la solución a la ecuación de Laplace en este caso, se puede expresar como:

$$v(r) = \begin{cases} b \cdot \ln(r) + c & \text{si } N = 2 \\ \frac{b}{r^{N-2}} + c & \text{si } N \geq 3 \end{cases}$$

Pregunta 6. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

a) Dadas dos funciones $\psi_1, \psi_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas sobre un abierto y de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$, defina la función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$v(x, y) = u(\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)).$$

a.1) Calcule ∇v.

a.2) Calcule Δv.

Indicación: Recuerde que el Laplaciano *de una función $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dado por*

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y).$$

b) Suponga ahora que $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^2$ y defina, para $(x, y) \neq (0, 0)$, la función

$$v(x, y) = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Pruebe que $\Delta v = 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

c) Pruebe la contrarecíproca de la afirmación anterior, es decir, si se define v como arriba con $\Delta v = 0$ entonces necesariamente $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Pregunta 7. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Pruebe que f es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

b) Calcule las segundas derivadas parciales de f en $(0, 0)$.

c) Notando que $\partial_x \partial_y f(0, 0) \neq \partial_y \partial_x f(0, 0)$, ¿Qué puede concluir al respecto?, explique esta aparente contradicción con el Teorema de Schwarz.

Pregunta 8.

a) Sea $f(x, t)$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial t}$. Supongamos que $f(x, 0) > 0, \ \forall x$. Pruebe que $f(x, t) > 0, \ \forall (x, t)$.

b) Suponga que la función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación diferencial:

$$\Delta u = 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Pruebe que u no puede tener un máximo local.

Pregunta 9. Conservación de la energía. Considere una onda ondulante cuyo desplazamiento está regido por una función $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ y que satisface la ecuación

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

donde $c^2 = \tau/\rho$. Además, las derivadas $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial u}{\partial x}$ son L-peródicas[1] en la variable x. La ecuación anterior que rige el movimiento de la cuerda está sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x); \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

donde f es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y g es continua en $(0,\infty)$. La *energía* del sistema ondulante en función del tiempo es igual a

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx + \frac{\tau}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx.$$

Muestre que la energía del sistema es constante en el tiempo, y concluya que este valor es igual a

$$\frac{\rho}{2}\int_0^L g(x)^2 dx + \frac{\tau}{2}\int_0^L f'(x)^2 dx.$$

Pregunta 10.

a) Consideremos el problema de valor inicial para la *ecuación de transporte no-homogénea* con coeficientes constantes, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \langle b, \nabla u(x,t)\rangle = f(x,t) \quad \text{para todo } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{1}$$
$$u(x,0) = g(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

donde $b \in \mathbb{R}^n$ es constante y las funciones $f : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son conocidas. Además, f es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ y g es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. La función $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es la incógnita, donde entendemos el gradiente considerado solo en las variables espaciales, es decir, $\nabla u = \nabla_x u$.

Para resolver este problema, dado $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ fijo, proponemos que considere la función real dada por

$$z(s) := u(x + sb, t + s).$$

Pruebe que $z'(s) = f(x + sb, t + s)$ y deduzca con esto que:

$$u(x,t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s-t)b, s)\,\mathrm{d}s,$$

resuelve el problema dado por (1) y (2).

Indicación: Recuerde que para una función h diferenciable se tiene $h(t_2) - h(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} h'(s)\,\mathrm{d}s$.

b) *Aplicación: Formula de D'Alembert para la ecuación de onda unidimensional*
Consideremos ahora el problema de valor inicial para la *ecuación de onda* en la recta; **es decir, desde ahora** $n = 1$, dado por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \qquad \text{para todo } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \tag{3}$$
$$u(x,0) = g(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

[1] Una función h es L-periódica si $h(x + L) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

donde las funciones $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son conocidas.

b.1) Muestre que si u es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u\right].$$

Defina $v = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u$ y suponga que u satisface (3). Muestre, usando la parte (a), que

$$v(x,t) = v(x-t, 0).$$

Indicación: Pruebe que v resuelve problema dado por (1) *y* (2) *para una elección adecuada de b, f y la condición inicial g.*

b.2) Usando la igualdad mostrada en la parte 1) muestre que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v(y,0)\,\mathrm{d}y + u(x+t, 0).$$

Finalmente, imponiendo las condiciones iniciales en $t = 0$, muestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $t > 0$, se tiene que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,\mathrm{d}y,$$

la cual se conoce como la *fórmula de D'Alembert.*

Pregunta 11. Consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Aquí, la incógnita es una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) Determine todas las funciones de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ con $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0\}$, para ello utilice las coordenadas $u(x,y) = x, v(x,y) = y/x$ y reescriba la ecuación original.

b) De las soluciones encontradas en la parte anterior, determine ahora aquellas de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$ tales que satisfacen además:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$$

Pregunta 12. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una primitiva de g (es decir, $h'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

a) Determine todas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ que resuelvan la ecuación diferencial:

$$g(y)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

considerando las coordenadas u y v tales que $x = u + h(v)$ e $y = v$

b) Utilice el resultado anterior para resolver la ecuación

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + (y^2+1)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

es decir, para determinar todas las funciones de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ que satisfagan la ecuación anterior.

Pregunta 13. Consideremos la siguiente transformación $T : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de *coordenadas cilíndricas*, definida por:

$$T(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

es decir, dada una tripleta de radio, ángulo polar y altura, T entrega el punto $(x(r,\theta,z), y(r,\theta,z), z(r,\theta,z))$ asociado a estas cantidades.

a) Pruebe que, localmente para todo $(r,\theta,z)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$, T es invertible con inversa de clase $\mathcal{C}^1$.

b) Considere ahora $f:\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ descrita en coordenadas cartesianas: $f=f(x,y,z)$. Si consideramos $g=f\circ T$ tenemos que g es la función f descrita en coordenadas cilíndricas. Pruebe que en tal caso:

$$\Delta_{(x,y,z)}f:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=:\Delta_{(r,\theta,z)}g$$

¿Dónde están evaluadas las derivadas parciales en cada caso?. A la expresión de la izquierda se le conoce como 'Laplaciano en coordenadas cartesianas', y a la de la derecha 'Laplaciano en coordenadas cilíndricas'.

Pregunta 14. Consideremos ahora la transformación $T:(0,\infty)\times[-\pi,\pi)\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$ de *coordenadas esféricas*, definida por:

$$T(r,\theta,\varphi)=(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

es decir, dada una tripleta de radio, ángulo polar y ángulo zenital, T entrega el punto $(x(r,\theta,\varphi),y(r,\theta,\varphi),z(r,\theta,\varphi))$ asociado a estas cantidades.

a) Pruebe que, localmente para todo $(r,\theta,\varphi)\in(0,\infty)\times[-\pi,\pi)\times[0,\pi]$, T es invertible con inversa de clase $\mathcal{C}^1$.

b) Considere ahora $f:\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ descrita en coordenadas cartesianas: $f=f(x,y,z)$. Si consideramos $g=f\circ T$ tenemos que g es la función f descrita en coordenadas esféricas. Pruebe que en tal caso:

$$\Delta_{(x,y,z)}f:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\cdot g)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)=:\Delta_{(r,\theta,\varphi)}g$$

¿Dónde están evaluadas las derivadas parciales en cada caso?. A la expresión de la derecha se le conoce como 'Laplaciano en coordenadas esféricas'.

Pregunta 15. Sea $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una función diferenciable en todo $\mathbb{R}^n$ tal que existe $\lambda\in(0,1)$ para el cual $\|Dg(x)\|_F\le\lambda$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$.[2] Consideremos la función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ definida por $f(x)=x+g(x)$. El objetivo de esta pregunta es demostrar que esta función es biyectiva. Para ello, proceda como sigue:

a) Pruebe que para todo $x,y\in\mathbb{R}^n$, se tiene $\|f(x)-f(y)\|_2\ge(1-\lambda)\|x-y\|_2$. Deduzca que f es inyectiva y que

$$\lim_{\|x\|_2\to\infty}\|f(x)\|_2=+\infty.$$

b) Verifique que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^n$ y pruebe que $\langle Df(x)h,h\rangle\ge(1-\lambda)\|h\|_2^2$ para todo $x,h\in\mathbb{R}^n$.
Indicación: Recuerde la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

c) Sea $y\in\mathbb{R}^n$. Considere la función $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que $u(x)=\|f(x)-y\|_2^2$. Pruebe que u es diferenciable en todo $\mathbb{R}^n$ y encuentre el valor de $\nabla u(x)$ en términos de $Df(x)$.

d) Pruebe que existe un $x_0\in\mathbb{R}^n$ tal que $\min_{x\in\mathbb{R}^n}u(x)=u(x_0)$.
Indicación: Recuerde el teorema de existencia de un óptimo para funciones coercivas.

e) Muestre que $f(x_0)=y$ y concluya el resultado.

Pregunta 16. Consideremos la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x,y)=(e^x\cos(y),e^x\sin(y))$$

a) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

---

[2]Para una matriz $A=(a_{ij})$, se define $\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$ y para todo $x\in\mathbb{R}^n$ se tiene que $\|Ax\|_2\le\|A\|_F\|x\|_2$.

b) Muestre que f es sobreyectiva de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
c) Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, muestre que f es localmente invertible en torno a (x_0, y_0), con inversa de clase $\mathcal{C}^1$.
d) ¿Es f globalmente invertible?.

Pregunta 17. Muestre que existe $r > 0$ tal que para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ verificando $|a| + |b| < r$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5x^2y^3 & = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) & = b \end{cases}$$

admite solución $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Pregunta 18.

a) Considere la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x+a\cos(y), y+b\sin(x))$. Determine una condición sobre los reales a, b para que f sea invertible localmente con inversa de clase $\mathcal{C}^1$ para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
b) Considere ahora la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Muestre que g es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y que $g'(0) \neq 0$, pero que sin embargo g no es inyectiva en ningún abierto que contenga a 0. ¿Qué puede concluir sobre g en $x = 0$?

Pregunta 19. Considere la función $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2) + e^{x_2}$.

a) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^2$ y determine su polinomio de Taylor de segundo orden en torno al punto $(0, -\pi/2)$.
b) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^3$ y que para todo $(x_1, x_2) \in B((0, -\pi/2), 1)$ se tiene:

$$|\partial_{x_i x_j x_k} f(x_1, x_2)| < 1 + e^{1-\pi/2}, \ \forall i, j, k \in \{1, 2\}$$

c) Determine un conjunto donde:

$$|f(x_1, x_2) - T_f^2(x_1, x_2)| < 8(1 + e^{1-\pi/2})/6000$$

Pregunta 20.

a) Considere la función $f(x, y) = \sin^2(x + y) + x^2y$
a.1) Encuentre el Polinomio de Taylor de orden 2 en torno al punto $(1, -1)$
a.2) Pruebe que:

$$|f(1 + h_1, -1 + h_2) - \mathcal{P}_2(h_1, h_2)| \leq 8||h||^3$$

b) Considere ahora la función de 3 variables:

$$f(x, y, z) = x^2y^4z + 3xy^2z - 5x^2y^3 + 5x^3z + (x^8 + z^8)e^{-y^2-x^2}\cos(xyz)$$

Encuentre su Polinomio de Taylor de orden 6 en torno al punto $(0, 0, 0)$.

Pregunta 21.

a) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = x^4 - y^4 - 3x^2 + 3y^2 + 1$$

Determine los puntos críticos de f y su tipo. En caso de existir (explique), determine el o los puntos donde la función alcanza su mínimo global.
b) Sea ahora $g(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 2$. Encuentre sus puntos críticos y clasifíquelos. Determine si existe un punto mínimo global de esta función, y de ser el caso, encuéntrelo.

Pregunta 22. Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$$

a) Encuentre los puntos críticos de F y caracterícelos.
b) Demuestre que

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} F(x, y) = 0$$

Deduzca con esto que F posee máximos y mínimos globales, indique quienes son.

Pregunta 23. En este problema probaremos un resultado conocido como *Teorema de la Envolvente*. Permite medir como varía el valor de un problema de optimziación en el óptimo de acuerdo a algún otro parámetro.

Para todo $y \in \mathbb{R}$, considere el problema de optimización dado por $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x, y)$, donde f es una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, y asuma que este problema posee una única solución óptima, que denotamos por $x^*(y)$. Luego, consideremos la función $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$V(y) = f(x^*(y), y).$$

Probaremos que para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$V'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*(y), y). \tag{6}$$

Para ello siga los siguientes pasos:

(1) Pruebe que para todo $y \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*(y), y) = 0$.
(2) Derive V parcialmente en y con regla de la cadena y usando la parte (a) concluya la igualdad en (6). *Observación:* Puede asumir que $x^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable.
(3) Aplique el resultado sobre la función $f(x, y) = 2x^2 + 3yx + y^2$ para probar que

$$V'(y) = -\frac{y}{4}.$$