Guía 2 - Cálculo en Varias Variables - Otoño 2019
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Profesor: Matías Godoy C.
Auxiliares: Nicolás Cornejo, Cristian Palma, Arie Wortsman

Pregunta 1. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones, si es verdadero ofrezca una demostración y en caso de ser falso entregue un contraejemplo

(1) Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A \cap B$ es compacto.
(2) Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A \cup B$ es compacto.
(3) $f(x, y) = \exp(1/(x^4 + y^4))$ alcanza su mínimo en $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.
(4) En $\mathbb{R}^2$ se tiene la identidad del paralelógramo con la norma $\|\cdot\|_1$.
(5) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua, entonces $f^{-1}(K)$ con K compacto, es compacto.
(6) Los conjuntos de nivel de un polinomio no constante son compactos.
(7) Dado el conjunto $A := \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que $\mathrm{Fr}(A) = A$.
(8) Todo conjunto finito o numerable posee interior vacío.
(9) Una función tal que $Df(x_0; e)$ existe para toda dirección e es diferenciable en $\overline{x}$.
(10) Si f es diferenciable en $\overline{x}$ entonces $\lim_{h\to 0} f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) - Df(\overline{x})h = 0$.

Pregunta 2.

a) Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que A es cerrado y B es compacto. Pruebe que

$$A + B := \{x + y,\ x \in A, y \in B\}$$

es cerrado. Pruebe además que si A es también compacto, entonces $A + B$ es compacto.

b) Sean ahora $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$. Pruebe que

$$A \times B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} :\ x \in A, y \in B\}$$

es compacto.

Pregunta 3. Dada una sucesión (x_k) en $\mathbb{R}^n$ convergente a $x \in \mathbb{R}^n$, pruebe que el conjunto:

$$A = \{x_k :\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

es compacto.

Pregunta 4. Sea (u_k) una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Para $n \geq 1$ definimos $A_k := \{u_l,\ l \geq k\}$. Demuestre que el conjunto de valores adherentes de (u_k) es:

$$V = \bigcap_{k\geq 1} \overline{A_k}$$

Deduzca que si la sucesión es acotada, entonces V es compacto.

Pregunta 5. Sea $(K_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos compactos *decrecientes* de $\mathbb{R}^n$, es decir: $K_{\ell+1} \subset K_\ell$. Definamos $K = \bigcap_{\ell\geq 0} K_\ell$.

a) Pruebe que $K \neq \emptyset$.
b) Suponga que existe un abierto A tal que $K \subset A$. Pruebe que existe ℓ tal que $K_\ell \subset A$.

Pregunta 6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

a) Pruebe que f es continua si y solo si para todo $O \subset \mathbb{R}^m$ abierto, se tiene que $f^{-1}(O) \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. ¿Es cierto el resultado si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con Ω abierto?
b) Pruebe que f es continua si y solo si para todo $O \subset \mathbb{R}^m$ cerrado, se tiene que $f^{-1}(O) \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado. ¿Es cierto el resultado si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con Ω abierto, y con Ω cerrado?

c) Verifique, entregando un contraejemplo, que en general no es cierto que una función continua f sea tal que $f(O)$ es abierto para O abierto y $f(C)$ sea cerrado para C cerrado.

Pregunta 7. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua no acotada, es decir,

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}_+ : \ \|x\| \geq M \Rightarrow f(x) \geq L$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $S_\lambda := \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \leq \lambda\}$. Pruebe que S_λ es compacto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pregunta 8. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) L es continua.
(2) $\exists C > 0 : \ \|L(x)\| \leq C\|x\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
(3) $\exists M > 0 : \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|L(x)\| \leq M$.

Pregunta 9. Sea $K \subset B(0,1)$ un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que existe $r < 1$ tal que $K \subset \overline{B}(0,r)$.
Indicación: Podría ser útil considerar la función $\|x\|$.

Pregunta 10. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes

(1) $\lim_{\|x\|\to\infty} |f(x)| = \infty$.
(2) Para todo conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}$ se tiene $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$ es acotado.
(3) Para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ se tiene $f^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^n$ es compacto.

Pregunta 11. Recordemos que una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice norma si satisface las condiciones siguientes:

(1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$,
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ se dicen equivalentes si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\alpha\|x\| \leq |||x||| \leq \beta\|x\|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En este caso escribiremos $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$.

El propósito de este problema, es probar que en $\mathbb{R}^n$ **todas las normas son equivalentes**. Para ello, considere $\|\cdot\|$ una norma cualquiera y $\|\cdot\|_1$ la norma definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$

(no es necesario que pruebe que esto define una norma) y siga los siguientes pasos:

a) Pruebe que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia, esto es, verifique que es refleja, simétrica y transitiva.
b) Notando que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede descomponerse como $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ con e_i el i-ésimo vector canónico, pruebe que $\|x\| \leq \beta\|x\|_1$ con $\beta = \max \|e_i\|$.
c) Pruebe que $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua cuando en $\mathbb{R}^n$ se considera la norma $\|\cdot\|_1$.
d) Considere el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_1 = 1\}$. Argumente por qué este conjunto es compacto en $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma $\|\cdot\|_1$, y utilizando la parte anterior, concluya que existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
e) Concluya el resultado esperado.

Pregunta 12. Sean A, B subconjuntos cualesquiera de $\mathbb{R}^n$. Definimos la distancia entre estos conjuntos, denotada $d(A, B)$, como

$$d(A, B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$$

a) Pruebe que si $A = \{a\}$ y B es cerrado, entonces existe $b \in B$ tal que $d(A, B) = \|a - b\|$.
b) Pruebe que si A es compacto y B es cerrado, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(A, B) = \|a - b\|$.
c) Encuentre un ejemplo donde, dados A y B cerrados, no existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(A, B) = \|a - b\|$.

Pregunta 13. Para $i = 1, \ldots, n$, se define la i-ésima proyección de un vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como $\pi_i(x) = x_i$.

a) Pruebe que la función $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua para todo $i = 1, \ldots, N$.
b) Deduzca que toda función polinomial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ es continua, donde $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$.
c) Concluya que todo polinomio en n variables p define una función continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, identificamos A como un vector en $\mathbb{R}^{n^2}$ por medio de la asignación

$$x(A) = (A_{1\bullet}, A_{2\bullet}, \ldots, A_{n\bullet}) = (A_{11}, \ldots, A_{1n}, A_{21}, \ldots, A_{2n}, \ldots, A_{n1}, \ldots, A_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}. \tag{1}$$

Recordemos además que el determinante de una matriz de $n \times n$, denotado $\det_n$, se puede definir por recurrencia como:

$$\det_1(A) = A, \;\; A \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$$
$$\det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot A_{i1} \cdot \det_{n-1}(A^{i1}), \;\; A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

donde A^{ij} es la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenida al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

d) Pruebe, usando inducción, que para todo natural $\ell \geq 1$ la función $\det_\ell : \mathcal{M}_{\ell\times\ell}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es un polinomio respecto a los elementos de la matriz $X = (X_{ij}) \in \mathcal{M}_{\ell\times\ell}(\mathbb{R})$.
Indicación: Por ejemplo, si $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\det_2(X) = X_{11}X_{22} - X_{21}X_{22} = p(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22})$ *con* $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *el polinomio de cuatro variables* $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3$.
e) Deduzca que, bajo la identificación descrita en (1), $\det_N : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ es una función continua.
f) Concluya que el conjunto $\mathrm{GL}(N, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \; A \text{ es invertible}\}$ es abierto en $\mathbb{R}^{n^2}$.
Indicación: Recuerde que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *es invertible si y sólo si* $\det_n(A) \neq 0$.

Pregunta 14. En esta pregunta probaremos un hecho muy interesante: La existencia de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ asociado a una norma $\| \cdot \|$ cuando esta satisface un hecho geométrico: La identidad del paralelogramo. Veremos que si una norma satisface:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \;\; 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

entonces, existe un producto interno tal que $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$, dado por:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle := \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

para ello:

a) Pruebe que, con la definición recién dada, se tiene: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \;\; \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
b) Pruebe que la función $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+n} \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ es continua.
c) Pruebe que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ se tiene: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

d) Pruebe que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$. Para ello argumente por inducción para $\lambda \in \mathbb{N}$, luego argumente como pasar a $\lambda \in \mathbb{Z}$, a $\lambda \in \mathbb{Q}$ y finalmente usando continuidad a $\lambda \in \mathbb{R}$. Concluya que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es efectivamente un producto interno.

Pregunta 15. Sea $\phi : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función continua, definamos $f : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ como:

$$f(x) = \phi\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)$$

a) Pruebe que f alcanza su máximo y su mínimo en su dominio.
b) Pruebe que si f no es una función constante, entonces el límite:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} f(\vec{x})$$

no existe.

Pregunta 16. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua tal que:

$$f(0) > 0, \;\; f(x) < 0 \text{ si } \|x\| > 1$$

Pruebe que f alcanza su máximo en $\mathbb{R}^n$.

Pregunta 17. Sea $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, y \geq 0\}$. Considere la función

$$f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)) \cdot (x^2 y^2 + \log(1 + |xy|)).$$

a) Pruebe que A es cerrado y f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.
b) Pruebe que f alcanza su máximo en A.
c) ¿Alcanza su mínimo en A?. Justifique.

Pregunta 18. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tales que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y $Dg(x_0) \neq 0$.

a) Suponga que $Df(x_0) = \lambda Dg(x_0)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Pruebe que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te)}{g(x_0 + te)} = \lambda$$

para todo vector $e \in \mathbb{R}^n$ tal que $Dg(x_0)e \neq 0$.

b) Suponga que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe. Pruebe entonces que $Df(x_0) = \lambda Dg(x_0)$ para algún $\lambda \in Rr$.

Pregunta 19. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & (x, y) \neq (0, 0), \\ \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Muestre que f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
b) Pruebe que f es continua en $(0, 0)$ si y solamente si $\alpha > \frac{3}{2}$.
Indicación: Use que $2ab \leq a^2 + b^2$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
c) Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
d) Calcule, usando la definición, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
e) Encuentre todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que f es diferenciable en $(0, 0)$.
Indicación: Podría serle útil considerar los casos $\frac{3}{2} < \alpha \leq \frac{9}{2}$ y $\alpha > \frac{9}{2}$ por separado.

Pregunta 20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^{3/2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Muestre que f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b) Pruebe que f es continua en $(0,0)$ si y solamente si $\alpha > \frac{3}{2}$.
c) Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
d) Calcule, usando la definición, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
e) Encuentre todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que f es diferenciable en $(0,0)$.
Indicación: Podría serle útil considerar los casos $\frac{3}{2} < \alpha \leq \frac{9}{2}$ y $\alpha > \frac{9}{2}$ por separado.

Pregunta 21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & y \in \mathbb{R}, x \neq 0, \\ y & x \in \mathbb{R}, y = 0. \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
b) Determine la derivadas parciales de f y estudie su continuidad en $\mathbb{R}^2$.
c) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

Pregunta 22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determine los α tal que f es continua en $\mathbb{R}^2$.
b) Determine la derivadas parciales de f en todo punto de $\mathbb{R}^2$.
c) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$ en función de los valores de α.

Pregunta 23. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(1 - \cos\left(\dfrac{x^2}{y}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2} & x \in \mathbb{R}, y \neq 0, \\ 0 & x \in \mathbb{R}, y = 0. \end{cases}$$

a) Muestre que f es continua en $\mathbb{R}^2$.
b) Pruebe la existencia de derivadas direccionales en toda dirección para el punto $(0,0)$.
c) Pruebe que f no es diferenciable en $(0,0)$. ¿Es esto contradictorio? Justifique.

Pregunta 24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Muestre que f es continua en $\mathbb{R}^2$.
b) Pruebe que f es diferenciable en $(0,0)$.
c) Pruebe que las derivadas parciales de f **no** son continuas en $(0,0)$.