MA2001 - Cálculo en Varias Variables - El teorema de Weierstrass en $\mathbb{R}^n$

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Profesor: Matías Godoy C.

Introducción

En este pequeño escrito veremos la demostración del teorema de Weierstrass de máximos y mínimos en $\mathbb{R}^n$. El teorema es análogo al caso unidimensional, reemplazando un intervalo $[a, b]$ por un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Comencemos con la discusión de cierto tipo de sucesiones 'clásicas' a la hora de estudiar problemas de máximos y mínimos.

1. Sucesiones mínimizantes/máximizantes

El tipo de problema que consideraremos en este curso (y en muchos otros, por cierto), es el de estudiar, para $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la existencia de soluciones para

$$(\mathcal{P}) \ \max_{x\in\Omega} f(x)$$

o

$$(\mathcal{P}') \ \min_{x\in\Omega} f(x)$$

El método 'tradicional' para atacar estos problemas, es el denominado 'método directo' y consiste esencialmente en los siguientes pasos (por ejemplo, para el problema de probar la existencia de un mínimo):

(1) Probar (de algún modo) que $m := \inf_{x\in\Omega} f(x) > -\infty$.
(2) Considerar una *sucesión minimizante* $(x_k) \subset \Omega$, es decir, una sucesión que satisface $f(x_k) \to m$ y probar que ella admite (al menos) una subsucesión $(x_{\varphi(k)})$ que converge a algún $x^* \in \Omega$.
(3) Probar finalmente que, para tal subsucesión $f(x_{\varphi(k)}) \to f(x^*) = m$.

Este método (que es el utilizado para probar el teorema de Weierstrass en $\mathbb{R}^n$), considera en su segundo paso la existencia de una sucesión minimizante (o maximizante en el caso del problema de un máximo); sin embargo esto no resulta obvio (no al menos cuando es la primera vez que vemos este argumento). Así pues, antes de probar el teorema, nos daremos el tiempo de probar que *efectivamente* existe esta sucesión.

Proposición 1. *Dada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $m := \inf_{x\in\Omega} f(x) > -\infty$, entonces, existe una sucesión $(x_k) \subset \Omega$ tal que $f(x_k) \to m$. Es decir, si el ínfimo de f en Ω no es $-\infty$, entonces siempre existe una sucesión minimizante.*

Proof. Notemos que $m := \inf_{x\in\Omega} f(x) = \inf f(\Omega) = \inf\{y = f(x), x \in \Omega\}$. Afirmamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in \Omega$ tal que $f(x_k) - \frac{1}{k} < m$, si ello no fuese cierto, tendríamos que: $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in \Omega : \ f(x) - \frac{1}{k} \geq m \Leftrightarrow f(x) \geq m + \frac{1}{k} > m$$

luego $m + \frac{1}{k}$ sería cota inferior para $f(\Omega)$ y como es estrictamente mayor que m, este último no podría ser el ínfimo del conjunto (el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores), lo que es una contradicción (m ES el ínfimo de $f(\Omega)$).
Así pues, tenemos la existencia de una sucesión (x_k) en Ω tal que

$$f(x_k) + \frac{1}{k} < m$$

tomando límite $k \to \infty$ se obtiene:

$$\lim_k f(x_k) \leq m$$

pero, por definición $m = \inf_{x\in\Omega} f(x)$, luego:

$$m \leq \lim_k f(x_k) \leq m$$

por lo tanto

$$\lim_k f(x_k) = m = \inf_{x\in\Omega} f(x)$$

$\square$

2. El teorema de Weierstrass en $\mathbb{R}^n$.

Recordemos la definición de conjunto compacto:

Definición 1. *$K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto si $\forall (x_k) \subset K$ es posible extraer una subsucesión $(x_{\varphi(k)})$ convergente a un límite en K, es decir: $\exists x \in K$: $(x_{\varphi(k)}) \to x$.*

Recordemos además el siguiente resultado visto en clases:

Proposición 2. *Dada $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua, entonces $f(K)$ es compacto. Es decir, si f es continua en un compacto, la imagen de un compacto, es un conjunto compacto.*

Probemos entonces el famoso teorema:

Teorema 1. *(Weierstrass) Sea $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con K compacto y f continua. Entonces f alcanza su máximo y su mínimo, es decir: $\exists\ \overline{x}, \underline{x} \in K$ tales que:*

$$\forall x \in K : \ f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$$

Proof. Usemos el método directo: en primer lugar, como f es continua, entonces $f(K)$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}$ y por Heine-Borel en particular es acotado, es decir: $f(K) \subset [a, b]$, es decir, $f(K)$ es acotado y no vacío, por axioma del supremo (y su corolario para el ínfimo) $f(K)$ posee supremo e ínfimo, es decir:

$$m := \inf_{x \in K} f(x) > -\infty, \ M := \sup_{x \in K} f(x) < +\infty$$

Con ello hemos probado el paso 1 del método directo.
En lo que sigue, probaremos el caso del mínimo, el del máximo es análogo (o, simplemente basta tomar $-f$).
Para el paso 2, sea $(x_k) \subset K$ una sucesión minimizante, es decir, tal que $f(x_k) \to m$ cuando $k \to \infty$. Notemos que como K es compacto, entonces existe una subsucesión $(x_{\varphi(k)})$ que converge a $\underline{x} \in K$. Lo que nos entrega el segundo paso.
Finalmente, para el paso 3, basta notar que, como f es continua en K: $f(x_{\varphi(k)}) \to f(\underline{x})$, y como $f(x_k) \to m$, necesariamente $m = f(\underline{x})$ (esto pues la sucesión $y_k = f(x_k)$ es convergente a m, luego toda subsucesión de ella también converge al mismo real). Así pues, hemos encontrado $\underline{x} \in K$ tal que:

$$f(\underline{x}) = m = \inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x)$$

es decir, f alcanza su mínimo en K. □