

MA2001 - Cálculo en Varias Variables - El teorema de Heine-Borel

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Profesor: Matías Godoy C.

INTRODUCCIÓN

En este pequeño escrito veremos la demostración completa del esencial teorema de Heine-Borel en $\mathbb{R}^n$. La importancia de este teorema por el momento no será aparente (comenzando por el hecho de que la definición de conjunto compacto es bastante ‘oscura’ para nuestros ojos principiantes); sin embargo resultará de suma importancia debido a dos puntos centrales:

- Caracteriza de manera sencilla (e incluso visual, en la mayoría de los casos) a los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, haciendo de ellos el ‘concepto paralelo’ a los intervalos de la forma $[a, b]$ en $\mathbb{R}$.
- Permitirá utilizar de manera muy sencilla un resultado de suma importancia (y que veremos muy pronto): El teorema de Weierstrass: Toda función continua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ con $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, alcanza su máximo y su mínimo en K . Es decir, lleva el conocido teorema de una variable, al caso multidimensional.

Comencemos con ciertos resultados previos de interés.

1. RESULTADOS PREVIOS ÚTILES.

Proposición 1. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado, entonces $\forall (x_k) \subset A, x_k \rightarrow x \Rightarrow x \in A$.

Proof. Probaremos que $\text{adh}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_k) \subset A, x_k \rightarrow x\}$. Luego, si A es cerrado, como sabemos que en tal caso se tiene $A = \text{adh}(A)$ concluiremos lo deseado (pues todos los puntos de A serán límites de sucesiones en A).

En efecto, sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_k) \subset A, x_k \rightarrow x\}$. Probemos que $\text{adh}(A) \subset S$ y $S \subset \text{adh}(A)$:

$S \subset \text{adh}(A)$: Sea $x \in S$, veamos que x es punto adherente de A , es decir, debemos probar que $\forall \varepsilon > 0$ se tiene $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $x \in S$, existe una sucesión $(x_k) \subset A$ tal que $x_k \rightarrow x$, para el ε fijado, por definición de convergencia se tiene que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0 : \|x_k - x\| < \varepsilon$ o, equivalentemente, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0 : x_k \in B(x, \varepsilon)$. De donde se deduce que, como la sucesión (x_k) está contenida en A :

$$B(x, \varepsilon) \cap A = \{x_k : k \geq k_0\} \neq \emptyset$$

de donde concluimos que x es adherente y por lo tanto $x \in \text{adh}(A)$.

$\text{adh}(A) \subset S$: Dado $x \in \text{adh}(A)$ debemos probar que está en S , es decir, debemos probar que existe una sucesión (x_k) en A tal que $x_k \rightarrow x$. La idea es aprovechar la definición de punto adherente para construir la sucesión buscada:

Como $x \in \text{adh}(A)$, entonces $\forall \varepsilon > 0$ se tiene $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Tomemos $\varepsilon = 1, \varepsilon = 1/2, \varepsilon = 1/3, \dots, \varepsilon = 1/j$. Como para cada uno de ellos se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, escogemos el término i -ésimo de (x_k) como alguno de los puntos en la intersección no vacía entre $B(x, 1/i)$ y A . Esta sucesión será convergente a $x \in A$:

$$\text{Por construcción: } \forall k : \|x - x_k\| < 1/k$$

y haciendo $k \rightarrow \infty$ se concluye que $(x_k) \rightarrow x$, es decir $x \in S$. □

Proposición 2. Sea $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión convergente a $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces toda subsucesión de (x_k) converge a x .

Proof. Sea $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función estrictamente creciente asociada a la subsucesión arbitraria $(x_{\varphi(k)})$. Probemos que la sucesión $(x_{\varphi(k)})$ converge a x

Debemos probar que: $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : \|x_{\varphi(k)} - x\| < \varepsilon$. Así pues, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como (x_k) converge a x , existe $\hat{k}_0$ tal que $\forall k \geq \hat{k}_0 : \|x_k - x\| < \varepsilon$. Como φ es estrictamente creciente, se tiene que $\varphi(k) \geq k$ (¿Por qué?), luego, para todo $k \geq \hat{k}_0$ se tiene:

$$\varphi(k) \geq k \geq \hat{k}_0 \Rightarrow \|x_{\varphi(k)} - x\| < \varepsilon$$

es decir, $x_{\varphi(k)} \rightarrow x$. □

Con esto será más sencillo probar lo deseado.

2. EL TEOREMA DE HEINE-BOREL

Recordemos la definición de conjunto compacto:

Definición 1. $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto si $\forall (x_k) \subset K$ es posible extraer una subsucesión $(x_{\varphi(k)})$ convergente a un límite en K , es decir: $\exists x \in K: (x_{\varphi(k)}) \rightarrow x$.

Probaremos el siguiente

Teorema 1. (Heine-Borel) $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si K es cerrado y acotado.

Proof. ($\Rightarrow$): Supongamos que K es compacto, probemos que es cerrado y acotado:

K es cerrado: Por la Proposición 1, basta probar que dada una sucesión $(x_k) \subset K$ tal que $(x_k) \rightarrow x$, entonces $x \in K$: Así pues, sea $(x_k) \subset K$ una sucesión arbitraria convergiendo a algún $x \in \mathbb{R}^n$. Como K es compacto, existe una subsucesión convergente de (x_k) , denotada $(x_{\varphi(k)})$ cuyo límite está en K , llamemos y a tal límite, es decir: $(x_{\varphi(k)}) \rightarrow y \in K$.

Finalmente, por la Proposición 2, como (x_k) es convergente a $x \in \mathbb{R}^n$, necesariamente la subsucesión $(x_{\varphi(k)})$ debe converger al mismo límite, y por tanto: $(x_k) \rightarrow x = y \in K$ de donde concluimos que K es cerrado.

K es acotado: Por contradicción, supongamos que K no es acotado, es decir: $\nexists M > 0$ tal que $K \subset B(0, M)$. Notar que esto es equivalente a decir que, para cada $M > 0$, existe $x_M \in K$ tal que $x_M \notin B(0, M)$, o escrito de forma más conveniente: $\|x_M\| \geq M$.

Tomando $M = 1, M = 2, \dots, M = k$, construimos una sucesión (x_k) tal que x_i es algún elemento de K tal que $x_i \notin B(0, i)$ (por lo anterior sabemos que para cada i existe alguno. Afirmamos que esta sucesión no posee subsucesiones convergentes, lo que será una contradicción al hecho que K es compacto:

Basta notar que cualquier subsucesión $(x_{\varphi(k)})$ es no acotada (y por lo tanto no convergente; por la contrareciproca del resultado visto en clases: (x_k) convergente, entonces (x_k) acotada), en efecto, por construcción:

$$\|x_{\varphi(k)}\| \geq \varphi(k)$$

y como $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, entonces necesariamente $\varphi(k) \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Con esto hemos concluido, por contradicción, que K debe ser acotado.

($\Leftarrow$): Esta la hicimos en clases, pero no está demás verla nuevamente:

Supongamos que K es cerrado y acotado, veamos que es compacto:

Debemos probar que, dada $(x_k) \subset K$, esta posee una subsucesión $(x_{\varphi(k)})$ convergente en K .

Así pues, si (x_k) es una sucesión arbitraria en K , como K es acotado, entonces (x_k) es acotada, y por el teorema de Bolzano-Weierstrass entonces existe una subsucesión $(x_{\varphi(k)})$ convergente a algún $x \in \mathbb{R}^n$. Para concluir basta notar que como K es cerrado, entonces por la Proposición 1, las sucesiones definidas en K que son convergentes poseen límite en K , por lo tanto $x \in K$, es decir, existe una subsucesión $(x_{\varphi(k)}) \rightarrow x \in K$, de donde concluimos que K es compacto. $\square$