

MA1102 Álgebra Lineal

Profesor: Alexander Frank Marambio

Auxiliar: Kevin Pinochet Hernández



Auxiliar Preparación Exámen

4 de julio de 2019

P1. Para la matriz A dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se le pide lo siguiente:

- Encuentre el conjunto solución S del sistema $Ax = b$ donde $b = (1, 1, 1, 1, 1)^t$, y determine qué tipo de subespacio afín es.
- Encuentre una base del espacio $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^5 : Ax = 0\}$ y determine su dimensión.
- Determine una base de $S_0^\perp$.
- Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones:
 - $b \in S_0 \cup S_0^\perp$.
 - $b \in S_0 + S_0^\perp$.

P2. Sea $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ con $m \geq n$.

- Demuestre que AA^t y A^tA son matrices simétricas.
- Demuestre que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^tA)$. Para ello considere la igualdad $x^t A^t A x = \|Ax\|^2$.
- Demuestre que si el rango de A es n, entonces A^tA es invertible.

P3. Considere la siguiente matriz de $n \times n$ con coeficientes reales:

$$A = aI + uu^t$$

donde a es un número real, $\mathbf{u}$ es un vector de norma 1, es decir $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^t \mathbf{u} = 1$, e I la matriz identidad de $n \times n$.

- Muestre que A es simétrica.
- Pruebe que $\mathbf{u}$ es vector propio de A , y pruebe que el valor propio asociado es " $a + 1$ ".
- Para cada $v \neq 0$ ortogonal a $\mathbf{u}$, es decir $\mathbf{u}^t v = 0$, pruebe que $\mathbf{v}$ es vector propio y calcule el valor propio asociado.
- De todos los valores propios de A y sus respectivas multiplicidades algebraicas y geométricas.
- Determine los valores de a , de manera que:
 - A es definida positiva.
 - A es invertible.

P4. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ dada por $[T]^{\mathcal{W}\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, en una ba-

se $\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, Encuentre explícitamente T en la base canónica $\mathcal{C} := \{E^{1,1}, E^{1,2}, E^{2,1}, E^{2,2}\}$.