MA1102 Álgebra Lineal
Profesor: Alexander Frank Marambio
Auxiliar: Kevin Pinochet Hernández

Auxiliar 14

26 de junio de 2019

P1. *a*) Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base **ortogonal** de $\mathbb{R}^n$. Pruebe que si v es ortogonal a cada v_i, $i = 1, \ldots, n$ entonces: $v = 0$.

b) Sea $V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle$

1) Encuentre una base de $V^\perp$.
2) Supoga que ahora se extrae el último vector de V, calcule el complemento ortogonal del conjunto resultante.

P2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertible. Considere una base ortonormal de vectores propios de AA^t. $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, asociado a valores propios no negativos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

a) Demuestre que $\alpha_i > 0$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

b) Sean $\sigma_i = \sqrt{\alpha_i}$, $i \in \{1, ..., n\}$. Se definen los vectores $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A^t v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Pruebe que cada u_i es vector propio de $A^t A$ de valor propio σ_i^2 y demuestre que $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ son ortonormales.

P3. Escriba en forma $x^t A x$ las siguientes formas cuadráticas y determine en cada caso si la matriz asociada es (semi)definida positiva, (semi)definida negativa, o ninguna.

a) $q(x) = x_1(2x_1 - x_3) + x_2(3x_1 + x_2)$

b) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3$

c) $q(x) = -2x_1^2 - \frac{1}{2} x_1 x_2 + 5x_2^2$

d) $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$

P4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

a) Demuestre que A es simétrica y definida positiva ssi existe un B invertible tal que $A = B^t B$

b) Concluya que si A es simétrica y definida positiva entonces $\exists v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle \forall i, j \in \{1, ..., n\}$.