MA1102 Álgebra Lineal
Profesor: Alexander Frank Marambio
Auxiliar: Kevin Pinochet Hernández

Auxiliar 8

08 de mayo de 2019

P1. *a*) Sea $\mathcal{W}$ un e.v sobre $\mathbb{R}$, con $dim(\mathcal{W}) = n$, y $\mathcal{T} : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Suponga que existe $w \in \mathcal{W} - Ker(\mathcal{T})$ tal que $Im(\mathcal{T}) =< \{w\} >$. Encuentre $dim(Ker(\mathcal{T}))$ y muestre que existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $\mathcal{T}(w) = \alpha w$.

b) Considere una transformación lineal $L : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$Ker(L) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \quad L\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \ L\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i) Justifique porqué L queda completamente determinada con esta información.

ii) Encuentre una expresión para $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

iii) Encuentre las dimensiones de $\text{Ker}(L)$, $\text{Im}(L)$. ¿ Es L epiyectiva? Justifique.

P2. Considere $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ alguna base de $\mathbb{R}^3$. Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{3,3}$. Consideremos la transformación lineal $T(x) = Ax$, y consideremos la siguiente matriz representante de T:

$$[T]^{\mathcal{V},\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Resuelva el sistema $Ax = 0$.

b) Resuelva el sistema $Ax = 2v_1 + v_2 + 2v_3$.

P3. *a*) Considere el conjunto $\mathcal{A} = \{1 + 3x + 2x^2, 1 + x - x^2, x + x^2\}$ y verifique que es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, el espacio de los polinomios de grado a lo más 2.

b) Ahora considere $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y justifique por qué $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

c) Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz representante de T con respecto a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en el espacio que corresponda. Encuentre T explícitamente. ¿Es T invertible?