MA1102 Álgebra Lineal
Profesor: Alexander Frank Marambio
Auxiliar: Kevin Pinochet Hernández

Auxiliar 4

10 de abril de 2019

P1. *a*) Determinar si $v \in S$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $v = (1, 2, -1)$, $S = \{(1, 3, 2), (2, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

ii) $v = (1, 0, -1, 3)$, $S = \{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (0, 1, 0, -2)\}$

b) Encontrar un sistema de generadores para cada uno de los siguientes espacios vectoriales sobre K:

1) $S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0; \ \ x - y = 0\}$ con $K = \mathbb{R}$

2) $S_2 := \{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \ / \ A_{ij} = -A_{ji}\}$ con $K = \mathbb{Q}$

c) Sean $v_1, \cdots, v_n$ vectores en $\mathbb{C}^n$ con $c_i \in \mathbb{R}$. Probar que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ $\iff$ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ son lineamente independientes sobre $\mathbb{C}$.

P2. Sea $h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $W_h = \{M \in \mathbb{R}^{2,2} \ / \ Mh = 0\}$.

a) Demuestre que W_h es s.e.v. de $\mathbb{R}^{2,2}$.

b) Encuentre una base para W_h y calcule su dimensión.

c) Complete la base de W_h encontrada en la parte anterior hasta obtener una base de $\mathbb{R}^{2,2}$.

P3. *a*) Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Demuestre que V es dimensionalmente infinito si y solo si V contiene un subconjunto infinito linealmente independiente.

b) Sea $(U, +)$ un grupo abeliano y V un anillo, decimos que U es un módulo sobre el anillo V si se cumplen las mismas propiedades que se pide para ser espacio vectorial, nótese que en este caso, los escalares viven en un anillo. En estas estructuras podemos definir lo que es un generador y una base exactamente igual que en los espacios vectoriales. A simple vista parece que son similares, por lo que el objetivo de esta pregunta es estudiar un caso particular donde un módulo es distinto a un espacio vectorial. Para esto:

i) Sea $\mathbb{Z}$ un módulo sobre el anillo $\mathbb{Z}$, explique por qué $\{1\}$ es base de $\mathbb{Z}$ (no lo demuestre).

ii) Demuestre que para un módulo, es falso que a partir de un generador, siempre se puede extraer una base del mismo. *Indicación*: Estudie el conjunto $\{2, 3\}$