MA1102 Álgebra Lineal

Auxiliar Extra C1

5 de abril de 2019

P1. **[Matrices]** Sea D $\in \mathbb{R}^{n,n}$ una matriz diagonal con coeficientes todos distintos, y consideremos A, B, M, S $\in \mathbb{R}^{n,n}$.

a) Demuestre que si $MD = DM$ entonces M es diagonal.

b) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$.

c) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.

P2. **[Invertibilidad]**

a) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule, escalonando, A^{-1}.

b) Sea B la matriz análoga a A pero de tamaño $n \times n$, es decir

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{o bien } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

justifique que:

i) B es invertible

ii) La generalización natural del caso $n = 4$ está dada por

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i = j - 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

es la inversa de B.

P3. **[Sistema de Ecuaciones]**
Sea el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + (3-\alpha)x_4 = \alpha \\ x_1 + x_3 + (\alpha+5)x_4 = \beta \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2\alpha + 4 \end{cases}$$

Encontrar los valores de α y β tal que:

a) No exista solución.

b) Existan infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.

c) Exista una única solución. Calcule dicha solución para el caso $\alpha = \beta = 1$.

P4. [EV's y SEV's]

a) Sea $\mathbb{P}_{n\leq 3}[X] := \{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \quad /a_i \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de polinomios menores o iguales a 3. Demuestre que $\mathbb{P}_{n\leq 3}[X]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

b) Se considera el sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1.n}x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m.n}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

Demostrar que el conjunto $\mathbb{W}$ de soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

c) Sea $U_b := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad /z = 5t + b$, con b $\in \mathbb{R}$, fijo $\}$. ¿Qué condición debe cumplir este conjunto para ser un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?.