

MA1102 Álgebra Lineal**Profesor:** Alexander Frank Marambio**Auxiliar:** Kevin Pinochet Hernández**Auxiliar 3**

3 de abril de 2019

- P1.** a) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que cumpla que:
- 1) Sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.
 - 2) Sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.
- b) Sea $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = f(2)\}$.
- 1) Verificar que la suma usual de polinomios es una operación en S (es decir: $f, g \in S \Rightarrow f + g \in S$).
 - 2) Verificar que el producto usual de un número real por un polinomio es una acción de $\mathbb{R}$ en S (es decir: $r \in \mathbb{R}, f \in S \Rightarrow r \cdot f \in S$).
 - 3) Probar que $(S, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. (Si se minimiza el trabajo sólo deberá verificarse una propiedad para esto).
- P2.** Sea $\mathbb{V} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Dado que $(\mathbb{V}, \cdot)$ es un grupo abeliano, y que $(\mathbb{V}, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial (tómelo como dato, no debe demostrarlo), se le pide lo siguiente:
- a) Demuestre que $(\mathbb{V}^2, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, donde la operación en $\mathbb{V}^2$ está dada por: $(a, b)^t \cdot (c, d)^t = (ac, bd)^t$ y la ponderación por escalar es $x \cdot (a, b)^t = (a^x, b^x)^t$.
 - b) Demuestre que $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{V} \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$.
- P3.** a) Sea $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, demuestre que A es invertible si y solo si A^k es invertible para algún $k \geq 1$.
- b) Las matrices que aparecen en esta parte son todas matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ con $n \geq 2$. De contraejemplos de las siguientes afirmaciones:
- 1) Si $AB = AC$ y además $A \neq 0$ entonces $B = C$.
 - 2) Para toda matriz A, B se tiene $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- c) Sea $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertible tal que cumple que $A^t = -A$ y que $(I - A)$ es invertible, se define B tal que $B = (I + A)(I - A)^{-1}$, demuestre que $B^t B = BB^t = I$.
- P4.** a) Considere la siguiente matriz A cuadrada de 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pruebe que A es invertible si y solo si $a^2 \neq 1$ y calcule su inversa.

- b) Considere el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -1 & a-2 & 1 \\ 2 & 2 & a-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Determine los valores de a y b tales que el sistema: tenga solución única, tenga infinitas soluciones, no tenga soluciones.