MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 3 de julio de 2019.

Auxiliar 13: Complejos

P1.- i) Encuentren los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$$

ii) Sea $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tales que $|w_1| = |w_2| = 1$ y $w_1 + w_2 = -1$.

a) Demuestre que $w_1 = \overline{w_2}$.

b) Demuestre que w_1, w_2 son raíces cúbicas de la unidad.

P2.- Sean $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 2$. Pruebe que si z es raíz n-ésima de la unidad y w es raíz m-ésima de la unidad. Pruebe que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $z \cdot w$ es raíz k-esima de la unidad.

P3.- Sean los números reales $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(k\alpha)$ y $S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} sen(k\alpha)$.

i) Demuestre que

$$S + iS' = (1 + cos(\alpha) + isen(\alpha))^n$$

ii) Escriba el número $1 + cos(\alpha) + isen(\alpha)$ en su forma polar y deduzca que

$$S = 2^n \left(cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n \cdot cos\left(\frac{n \cdot \alpha}{2}\right)$$
$$S' = 2^n \left(cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n \cdot sen\left(\frac{n \cdot \alpha}{2}\right)$$

Hint: Recuerde que $cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)$ y $sen(x + y) = sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x)$.

P4.- Se define el conjunto $\mathbb{Z}[i]$ como sigue

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid |a, b \in \mathbb{Z}\} \backslash \{0\}$$

i) Demuestre que $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ no tiene divisores del cero ($+$ y $\cdot$ son las operaciones de suma y multiplicación de $\mathbb{C}$).

Hint: Recuerde un elemento $a \in \mathbb{C}$ es divisor de 0 $\iff$ a es cancelable para $(\mathbb{C}, \cdot)$.

ii) **(Propuesto)** Demuestre que los únicos elementos invertibles de $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ son $1, i, -1, -i$.

RESUMEN

Definición 1 (L.C.I)**.** Dado un conjunto no vacío llamamos **ley de compoición interna** en A a la función $*: A \times A \to A$ tal que

$$(x, y) \to x * y$$

Al par $(A, *)$ lo llamamos **estructura algebraica**.

Sea $(A, *)$ una estructura algebraica. Decimos que $*$:

- Es **asociativa** si: $x, y, z \in A, (x*y)*z = x*(y*z)$.
- Tiene neutro si $\exists e \in A$ tal que, $\forall x \in A$, $x * e = e * x = x$.
- $x \in A$ tiene inverso si $\exists y \in A$ tal que $x * y = y * x = e$.
- es **conmutativa** si, $\forall x, y \in A, x * y = y * x$.
- Tiene un elemento **absorbente** si $\exists a \in A$ tal que $\forall x \in A, x * a = a * x = a$.
- Tiene un elemento **idempotente** si $\exists a \in A$ tal que $a * a = a$.

Proposición 1 (Unicidad neutro)**.** *Toda estructura algebraica posee* ***solo un*** *neutro.*

Proposición 2 (Unicidad inverso)**.** *Para una estructura algebraica $(A, *)$ con $*$ asociativa, los inversos (en caso de existir) son únicos).*

Definición 2 (Homomorfismo)**.** Dadas dos estructuras algebraicas $(A, *)$ y (B, Δ), una función $f : A \to B$ **homomorfismo** de $(A, *)$ en (B, Δ) si:

$$\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x)\Delta f(y)$$

Observación 1. Si f es biyectiva, diremos que es un **isomorfismo**. Y además, f^{-1} es isomorfismo de $B \to A$.

Proposición 3. *Si existe un* ***epimorfismo*** *f entre $(A, *)$ y (B, Δ), entonces se tiene que:*

- *Si $(A, *)$ es asociativa, (B, Δ) también lo es.*
- *Si $(A, *)$ conmuta, (B, Δ) también.*
- *Si e_A es neutro para $(A, *)$, $f(e_A)$ es neutro para (B, Δ). (**Nota:** En general, si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$)*

Definición 3. En el espacio de las funciones B^A se define la operación $*$ tq $\forall f, g \in B^A$, $f * g = f(a) *_B g(a)$ con $a \in A$ y $*_B$ la operación de la estructura $(B, *_B)$.

Definición 4 (Grupo)**.** Una estructura algebraica $(G, *)$ diremos que es un **grupo** si:

- $*$ es **asociativa**
- $*$ admite neutro en G
- Todo elemento de G posee inverso en G según $*$.

Diremos que es **grupo abeliano** si $*$ es conmutativa.