

MA1101-4 Introducción al Álgebra.**Profesor:** Sebastián Donoso.**Auxiliar:** Benjamín Jauregui.**Fecha:** 14 de junio de 2019.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 11 - $e^{\pi i}$: Estructuras algebraicas v3

...y complejos

P1.- (Desigualdad triangular)

- i) Dados, $z, w \in \mathbb{C}$, demuestre que $z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$.
- ii) Sean $z, w \in \mathbb{C}$, demuestre que $|z + w| \leq |z| + |w|$.

- P2.-** i) Sea $(G, \cdot)$ un grupo con neutro $e \in G$ y sean H, K dos subgrupos de $(G, *)$ tales que $|H| = 38$ y $|K| = 55$. Demuestre que $H \cap K$ es subgrupo de $(H, *)$ y de $(K, *)$. Con esto concluya que $H \cap K = \{e\}$.
- ii) Considere el cuerpo de los complejos $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ con la suma y multiplicación de los complejos. Sea $B = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$. Demuestre que B es subgrupo de $(\mathbb{C}, \cdot)$.

- P3.-** Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad, tal que $|A|$ es finito.

- i) Demuestre que si $a \in A$ es divisor del 0, entonces no es invertible.
- ii) Sea $x \in A$ no invertible y $x \neq 0$ (el cero del anillo)
 - a) Muestre que $\forall k \in \mathbb{N}, x^k \neq 1$ (la unidad del anillo).
 - b) Muestre que $\exists n, m \in \mathbb{N}^*, n \neq m$, tal que $x^n = x^m$.
 - c) Concluya que x es divisor del 0.
- iii) Suponga que existe un $x \in A$ divisor del 0. ¿Es $(A, +, \cdot)$ un cuerpo?

- P4.- (Propuesto)** Sea $(X, +, \cdot)$ un anillo conmutativo. En X^2 se definen las siguientes leyes de composición interna, $\forall (a, b), (c, d) \in X^2$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + b, c + d) \quad a, b \oplus (c, d) = (a \cdot c, 0)$$

Sabiendo que $(X^2, \oplus)$ es grupo abeliano:

- i) Verifique que $(X^2, \oplus, \otimes)$ es un anillo conmutativo.
- ii) Investigue si $(X^2, \oplus, \otimes)$ tiene unidad y/o divisores de cero. ¿Es $(X^2, \oplus, \otimes)$ un cuerpo? Justifique.

- P5.- (Propuesto)** Sea $A = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ y consideremos la l.c.i en A dada por

$$(x, y) * (u, v) = (xu, yv)$$

- ii.1) Demuestre que $(A, *)$ es grupo abeliano.
- ii.2) Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo con $a \neq 0$. Demuestre que $H = \{(x, y) \in A : y = x^a\}$ es un subgrupo de $(A, *)$