



Auxiliar 11: Estructuras algebraicas v2

P1.- Demuestre que $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ es un anillo. Para ello se sugiere el siguiente camino.

- Demuestre que $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ definida por $f(x) = [x]_n$ es un epimorfismo entre $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Z}_n, +_n)$, y también entre $(\mathbb{Z}, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n)$.
- Usando que $(\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano (no lo demuestre) demuestre que $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ es grupo abeliano.
- Demuestre que $\cdot_n$ es asociativa.
- Demuestre que $\cdot_n$ distribuye respecto $+_n$ y concluya que $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ es un anillo.

P2.- Sea $f : (\mathbb{Z}_m, +_m) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un homomorfismo. Demuestre que f es la función constante igual a 0.

Hint: Demuestre primero que $f([1]_m) = 0$ y usando eso demuestre que $f([x]_m) = 0, \forall [x]_m \in \mathbb{Z}_m$.

P3.- Sea $G = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$. Para $x, y \in G$ se define la l.c.i $*$ por $x * y = xy - x - y + 2$.

- Demuestre que $(G, *)$ es un grupo abeliano.
- Demuestre que $(G, *)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

P4.- Sea $(G, *)$ un grupo de cardinalidad finita y par (es decir, $|G| = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$) con neutro $e \in G$. Demuestre que existe un $a \in G$ tal que $a \neq e$ y $a^{-1} = a$.

P5.- (Propuesto) Sea $(G, *)$ un grupo con elemento neutro e . Se define en $G \times G$ la ley de composición interna Δ como:

$$(a, b)\Delta(c, d) = (a * c, b * d), \forall (a, b), (c, d) \in G \times G$$

- Demuestre que $(G \times G, \Delta)$ es grupo.

Para el resto de la pregunta considere $(G, *)$ grupo abeliano.

- Considere la función

$$\begin{aligned} \varphi : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\rightarrow (a * b)^{-1} \end{aligned}$$

Demuestre que φ es un homomorfismo de $(G \times G, \Delta)$ en $(G, *)$.

- Demuestre que φ no es un isomorfismo.

RESUMEN

Definición 1 (L.C.I.). Dado un conjunto no vacío llamamos **ley de composición interna** en A a la función $*$: $A \times A \rightarrow A$ tal que

$$(x, y) \rightarrow x * y$$

Al par $(A, *)$ lo llamamos **estructura algebraica**.

Sea $(A, *)$ una estructura algebraica. Decimos que $*$:

- Es **asociativa** si: $x, y, z \in A, (x*y)*z = x*(y*z)$.
- Tiene neutro si $\exists e \in A$ tal que, $\forall x \in A, x * e = e * x = x$.
- $x \in A$ tiene inverso si $\exists y \in A$ tal que $x * y = y * x = e$.
- es **conmutativa** si, $\forall x, y \in A, x * y = y * x$.
- Tiene un elemento **absorbente** si $\exists a \in A$ tal que $\forall x \in A, x * a = a * x = a$.
- Tiene un elemento **idempotente** si $\exists a \in A$ tal que $a * a = a$.

Proposición 1 (Unicidad neutro). *Toda estructura algebraica posee **solo un** neutro.*

Proposición 2 (Unicidad inverso). *Para una estructura algebraica $(A, *)$ con $*$ asociativa, los inversos (en caso de existir) son únicos.*

Definición 2 (Homomorfismo). Dadas dos estructuras algebraicas $(A, *)$ y (B, Δ) , una función $f : A \rightarrow B$ **homomorfismo** de $(A, *)$ en (B, Δ) si:

$$\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$$

Observación 1. Si f es biyectiva, diremos que es un **isomorfismo**. Y además, f^{-1} es isomorfismo de $B \rightarrow A$.

Proposición 3. *Si existe un **epimorfismo** f entre $(A, *)$ y (B, Δ) , entonces se tiene que:*

- Si $(A, *)$ es asociativa, (B, Δ) también lo es.
- Si $(A, *)$ conmuta, (B, Δ) también.
- Si e_A es neutro para $(A, *)$, $f(e_A)$ es neutro para (B, Δ) . (**Nota:** En general, si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$)

Definición 3. En el espacio de las funciones B^A se define la operación $*$ tq $\forall f, g \in B^A, f * g = f(a) *_B g(a)$ con $a \in A$ y $*_B$ la operación de la estructura $(B, *_B)$.

Definición 4 (Grupo). Una estructura algebraica $(G, *)$ diremos que es un **grupo** si:

- $*$ es **asociativa**
- $*$ admite neutro en G
- Todo elemento de G posee inverso en G según $*$.

Diremos que es **grupo abeliano** si $*$ es conmutativa.