**MA1101-4 Introdución al Álgebra.**
**Profesor:** Sebastián Donoso.
**Auxiliar:** Benjamín Jauregui.
**Fecha:** 5 de junio de 2019.

# Auxiliar 10: No numerabilidad ft. estructuras algebraicas

**P1.-**

i) Demuestre que el conjunto $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{N} |$ f es función biyectiva$\}$ tiene cardinalidad finita.

ii) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no numerable y $B \subseteq \mathbb{R}$ numerable. Demuestre que $A \backslash B$ es no numerable. Use esto para concluir que el conjunto $\mathbb{I}$ de los irracionales es no numerable.

**P2.-** Se define en $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

i) Demuestre que $*$ no es conmutativa.
ii) Demuestre que $*$ es asociativa.
iii) Determine el o los neutros de $(\mathbb{R}^2, *)$.
iv) Determine los elementos invertibles de $(\mathbb{R}^2, *)$ y calcule sus inversos.
v) Determine los elementos idempotentes en $(\mathbb{R}^2, *)$.
vi) ¿Es $(\mathbb{R}^2, *)$ grupo?

**P3.-** Sea $(G, *)$ un grupo. Sea la función $f : G \to G$ dada por $f(x) = x^{-1}$. Demuestre que

$$f \text{ es automorfismo } \iff (G, *) \text{ es grupo abeliano}$$

**P4.-** Sea $(G, *)$ un grupo con elemento neutro $e$. Se define en $G \times G$ la ley de composición interna $\Delta$ como:

$$(a, b)\Delta(c, d) = (a * c, b * d), \forall (a, b), (c, d) \in G \times G$$

i) Demuestre que $(G \times G, \Delta)$ es grupo.

Para el resto de la pregunta considere $(G, *)$ grupo abeliano.

ii) Considere la función

$$\begin{aligned} \varphi : & G \times G \to G \\ & (a, b) \to (a * b)^{-1} \end{aligned}$$

Demuestre que $\varphi$ es un homomorfismo de $(G \times G, \Delta)$ en $(G, *)$.

iii) Demuestre que $\varphi$ no es un isomorfismo.

## RESUMEN

**Definición 1** (L.C.I)**.** Dado un conjunto no vacío llamamos **ley de compoición interna** en A a la función $*: A \times A \to A$ tal que

$$(x, y) \to x * y$$

Al par $(A, *)$ lo llamamos **estructura algebraica**.

Sea $(A, *)$ una estructura algebraica. Decimos que $*$ :

- Es **asociativa** si: $x, y, z \in A, (x*y)*z = x*(y*z)$.
- Tiene neutro si $\exists e \in A$ tal que, $\forall x \in A$, $x * e = e * x = x$.
- $x \in A$ tiene inverso si $\exists y \in A$ tal que $x * y = y * x = e$.
- es **conmutativa** si, $\forall x, y \in A, x * y = y * x$.
- Tiene un elemento **absorbente** si $\exists a \in A$ tal que $\forall x \in A, x * a = a * x = a$.
- Tiene un elemento **idempotente** si $\exists a \in A$ tal que $a * a = a$.

**Proposición 1** (Unicidad neutro)**.** *Toda estructura algebraica posee* ***solo un*** *neutro.*

**Proposición 2** (Unicidad inverso)**.** *Para una estructura algebraica $(A, *)$ con $*$ asociativa, los inversos (en caso de existir) son únicos).*

**Definición 2** (Homomorfismo)**.** Dadas dos estructuras algebraicas $(A, *)$ y $(B, \Delta)$, una función $f : A \to B$ **homomorfismo** de $(A, *)$ en $(B, \Delta)$ si:

$$\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$$

**Observación 1.** Si $f$ es biyectiva, diremos que es un **isomorfismo**. Y además, $f^{-1}$ es isomorfismo de $B \to A$.

**Proposición 3.** *Si existe un* ***epimorfismo*** *$f$ entre $(A, *)$ y $(B, \Delta)$, entonces se tiene que:*

- *Si $(A, *)$ es asociativa, $(B, \Delta)$ también lo es.*
- *Si $(A, *)$ conmuta, $(B, \Delta)$ también.*
- *Si $e_A$ es neutro para $(A, *)$, $f(e_A)$ es neutro para $(B, \Delta)$. (**Nota:** En general, si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$)*

**Definición 3.** En el espacio de las funciones $B^A$ se define la operación $*$ tq $\forall f, g \in B^A$, $f * g = f(a) *_B g(a)$ con $a \in A$ y $*_B$ la operación de la estructura $(B, *_B)$.

**Definición 4** (Grupo)**.** Una estructura algebraica $(G, *)$ diremos que es un **grupo** si:

- $*$ es **asociativa**
- $*$ admite neutro en $G$
- Todo elemento de $G$ posee inverso en $G$ según $*$.

Diremos que es **grupo abeliano** si $*$ es conmutativa.