MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 31 de mayo de 2019.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Resumen C4

RESUMEN

Definición 1 (Secuencia)**.** Una **secuencia de reales** es una función $a : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{N}$. Se denota por $a_i = a(i)$.

Proposición 1. *Las siguientes sumas son conocidas*

- $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ *(Telescópica)*
- $\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$ *(suma constante)*
- $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, $a \neq 1$ *(Geométrica)*

Definición 2 (Suma conjunto de índices)**.** Sea $a : \Omega \to \mathbb{R}$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $f : [1, ..., n] \to \Omega$. Definimos $b_k = a_{f(k)}$ y:

$$\sum_{k \in \Omega} a_w = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Definición 3 (Sumas dobles)**.** Se tiene que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_k b_j$$

Definición 4 (Intercambio de sumatorias)**.** Se tiene que, en una sumatoria doble, si los límites inferiores y superiores de ambas sumas no dependen de los indices, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$$

Propiedades 1 (Binomial)**.** *Para n y k enteros, $n \geq 0$.*

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Teorema 1 (Binomio de Newton)**.**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Definición 5 (Mejor definición del apunte)**.** Decimos que un conjunto A es infinito si no es finito.

Propiedades 2. *Sean A, B conjuntos cualesquiera, entonces se cumple que*

- $|A| \leq |A|$
- *Si*$A \subseteq B$*, entonces* $|A| \leq |B|$
- *Si*$|A| \leq |B|$ *y* $|B| \leq |C|$*, entonces* $|A| \leq |C|$.
- $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$ *(Schöder-Berstein).*

Definición 6 (Numerable)**.** Un conjunto A se dice numerable si existe una función biyectiva $f : A \to \mathbb{N}$.

Proposición 2 (Numerables conocidos)**.** $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{Z}$ *son numerables, así como cualquier unión de ellos, o producto cartesiano finito.*

Propiedades 3 (Propiedades muy útiles)**.**

- *Unión finita o numerable de conjuntos finitos o numerables es numerable.*
- *Sean* $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ *colección FINITA de conjuntos numerables, entonces* ${}_{i=1}^{n} A_i$ *es finito o numerable, respectivamente.*