MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 31 de mayo de 2019.

Auxiliar 9: Cardinalidad

P1.- i) Muestre que el conjunto $A = \{(m, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} | m \leq n\}$ es numerable.

ii) **(Propuesto)** Demuestre que el conjunto de los triángulos cuyos vértices son racionales (es decir, sus vértices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$) es numerable.

P2.- Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y definimos el conjunto

$$B = \{f_n(a) | a \in A, n \in \mathbb{N}\}$$

.

Demuestre que si A es numerable también lo es B.

P3.- El objetivo de esta pregunta es demostrar que el conjunto $\{A \subseteq \mathbb{N} : |A| \leq 2\}$ es numerable. Para ello, siga el siguiente camino.

Se define $M_k = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| = k\}$ para $k \in \mathbb{N}$ y $M = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| \leq 2\}$.

i) Verifique que M_0 es finito.

ii) Demuestre que $|M_1| = |\mathbb{N}|$.

iii) Describa M_2 y muestre que $|M_2| \leq |\mathbb{N}^2|$.

iv) Concluya que $|M| = |\mathbb{N}|$.

P4.- i) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no numerable y sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos tal que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = A$.

Demuestre que existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que A_i no es numerable.

ii) Demuestre que el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales es no numerable.

P5.- **(Estructura en conjunto de funciones)**

Dados dos conjuntos A, B consideramos el conjunto de funciones $B^A = \{f : A \to B | \text{f función}\}$. Si $(B, *)$ es una estructura, esta estructura se puede heredar al conjunto de funciones B^A. Es decir, definimos $*$ en B^A de modo tal que $\forall f, g \in B^A$, $f * g = f(a) * g(a)$ con $a \in A$ fijo. Verifique los siguientes puntos de esta construcción.

i) Verifique $*$ es una ley de composición interna en B^A.

ii) Si $(B, *)$ es asociativa (resp. conmutativa), $(B^A, *)$ también es asociativa (resp. conmutativa).

iii) Si $(B, *)$ tiene neutro e, entonces la función constante $f(x) = e$ es neutro en $(B^A, *)$.

RESUMEN

Definición 1 (Secuencia)**.** Una **secuencia de reales** es una función $a : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{N}$. Se denota por $a_i = a(i)$.

Proposición 1. *Las siguientes sumas son conocidas*

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ *(Telescópica)*
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$ *(suma constante)*
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, $a \neq 1$ *(Geométrica)*

Definición 2 (Suma conjunto de índices)**.** Sea $a : \Omega \to \mathbb{R}$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $f : [1, ..., n] \to \Omega$. Definimos $b_k = a_{f(k)}$ y:

$$\sum_{k \in \Omega} a_w = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Definición 3 (Sumas dobles)**.** Se tiene que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_k b_j$$

Definición 4 (Intercambio de sumatorias)**.** Se tiene que, en una sumatoria doble, si los límites inferiores y superiores de ambas sumas no dependen de los indices, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$$

[Binomial] Para n y k enteros, $n \geq 0$.

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Teorema 1 (Binomio de Newton)**.**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$