

Prouta Auxiliar 8

P1) PARA demostrar las propiedades, al no ser finitos necesariamente los conjuntos A, B se usará que:

$$1) |A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B \text{ inyectiva}$$

$$2) |A| \geq |B| \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B \text{ epinyectiva}$$

Entonces:

a) i) PDQ: $|A| \leq |A|$

Debemos encontrar una función inyectiva $f: A \rightarrow A$.
PARA esto, consideramos la función identidad $I_A: A \rightarrow A$ la cual
 $x \mapsto x$
sabemos (de la unidad de funciones) que es biyectiva y por ende
es inyectiva. Por lo tanto $|A| \leq |A|$

ii) PDQ: Si $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$

Como $A \subseteq B$, consideremos la función $g: A \rightarrow B$, esta función
 $x \mapsto g(x) = x$
es inyectiva y por lo tanto $|A| \leq |B|$

iii) PDQ: Si $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

Como $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, entonces existen funciones

$f_1: A \rightarrow B$ inyectivas. Luego definiendo f función f_2
 $f_2: B \rightarrow C$

$$\tilde{f}: A \rightarrow C$$

$$x \mapsto (f_2 \circ f_1)(x)$$

Tenemos que:

→ $\tilde{f}$ está bien definida

→ $\tilde{f}$ es inyectiva ya que es composición de funciones inyectivas

$$\Rightarrow |A| \leq |C| //$$

P2) PDQ:
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

LA IDEA es USAR binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

notemos que en esa fórmula necesitamos:

1) DEBE PARTIR en 0.

2) límite superior de la suma debe coincidir con el término superior del binomial, es decir, ¿puedo usar binomio de N.

en $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k}$ directamente? NO ya que el término superior del binomial es $n+1$ pero el límite superior de la suma es n .

Con estas precauciones en mente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(-1)^k}{k+1} & | k!(k+1) &= (k+1)! \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \cdot (-1)^k & | (n-k)! &= ((n+1)-(k+1))! \\ & & | y n! &= \frac{(n+1)!}{n+1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!(n+1)} \cdot (-1)^k \quad \left| \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \right.$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (-1)^k$$

Cambio de índice en la suma.
 $j = k+1$ $\rightarrow$ como k empieza en 0 entonces j empieza en 1
 $\rightarrow$ como k termina en n lo j termina en $n+1$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{j-1}$$

$$\left| \begin{aligned} (-1)^{j-1} &= \frac{(-1)^j}{(-1)} = -(-1)^j \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \left(- \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j \right)$$

PARA USAR binomio de newton suma debe partir en 0

$$= \frac{(-1)}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j - \binom{n+1}{0} (-1)^0 \right)$$

$$= \frac{(-1)}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j \cdot 1^{n+1-j} - 1 \right) \quad \left| \begin{aligned} &\text{Ahora si podemos usar} \\ &\text{B. de Newton!} \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{(-1)}{n+1} \left((1-1)^{n+1} - 1 \right) \quad \left| (1-1)^{n+1} = 0 \right.$$

$$= \frac{-1}{n+1} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{n+1} //$$

P3) Calcule $\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^n \frac{3^j (k+1)}{2^{2j}}$

Entonces:

3^j y $2^{2j}-1$ son ctes PARA la suma en k .

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^n \frac{3^j (k+1)}{2^{2j}} = \sum_{j=1}^n \frac{3^j}{2^{2j}} \cdot \sum_{k=0}^n (k+1)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{3^j}{2^{2j-1}} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} + n+1 \right) \quad \left| \frac{2^{2j-1}}{2} = \frac{4^j}{2} \right.$$

$$= 2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{3}{4} \right)^j \cdot \left((n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \right)$$

$$= \frac{2(n+1)(n+2)}{2} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{3}{4} \right)^j$$

$$= (n+1)(n+2) \cdot \left(\sum_{j=0}^n \left(\frac{3}{4} \right)^j - 1 \right)$$

$$= (n+1)(n+2) \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} - 1 \right)$$

$$= (n+1)(n+2) \cdot \left(\frac{(4^{n+1} - 3^{n+1})/4^{n+1}}{\frac{4-3}{4}} - 1 \right)$$

$$= (n+1)(n+2) \cdot (4^{n+1} - 3^{n+1} - 4^n)$$

$$= (n+1)(n+2) (4 \cdot 3 - 3^{n+1}) = 3(n+1)(n+2) (4^n - 3^n) //$$

$$p4) \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n a_i$$

$$\text{entonces } b_{i,k} = \begin{cases} a_i & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=i}^n 1$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i (n-i+1) / 2$$

La heurística es la siguiente:

Se tiene que $b_{i,k} \neq 0 \Leftrightarrow i \leq k$ cuando cambiemos los índices esta condición se debe mantener.

Así, primero se tiene que en la suma original i toma valores entre 1 y n , así se tiene que al cambiar los índices i recorre desde 1 hasta n .

Ahora, al hacer el cambio queda k dependiendo de i (antes i dependía de k ya que i sumaba desde 1 hasta k) de tal forma que se cumpla la condición $i \leq k$, por lo tanto i es una cota inferior para k y así k suma desde i hasta n (ya que k no tiene cota superior que dependa de i).