MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 20 de mayo de 2019.

Auxiliar 7: Relaciones y sumatorias

Valar morghulis

P1.- Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \backslash \{0\}$ por $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff ad = bc$.

i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Demostración

Refleja

Sea $(a,b) \in \mathbb{X} \times \mathbb{N}^*$ entonces es directo notar que $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ ya que $ab = ab$.

Transitiva

Sea $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{X} \times \mathbb{N}^*$ tal que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ y $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$. De estas dos relaciones se obtiene que

$$ad = bc \qquad (1)$$
$$cf = de \qquad (2)$$

Luego, para ver que $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$ debemos probar que $af = be$, para ello la idea es usar las igualdades de (1) y (2). Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} a \cdot f \cdot d &= f \cdot (a \cdot d) && \text{Usando (1)} \\ &= f \cdot (b \cdot c) && \text{Usando asociatividad} \\ &= (f \cdot c) \cdot d && \text{Usando (2)} \\ &= (d \cdot e) \cdot b \end{aligned}$$

Por lo tanto $a \cdot f \cdot d = b \cdot e \cdot d$ y como $d \neq 0$ (ya que $d \in \mathbb{N}^*$) entonces se puede cancelar y se obtiene que $a \cdot f = b \cdot e$ y por lo tanto $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$

Simetría

Sea $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tal que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$. Hay que demostrar que entonces $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.
Como $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ entonces

$$ad = bc \qquad (3)$$

. Luego, $(c,d)\mathcal{R}(a,b) \iff cb = da$, pero $cb = da$ ya que se cumple (3) al cumplirse $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$. Por lo tanto $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$ y así $\mathcal{R}$ es relación simétrica.
Como se cumplen las tres propiedades anteriores, entonces $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

ii) Determine la clase de equivalencia del elemento $(0,2)$.

Desarrollo

La clase de equivalencia del (0,2) esta definida como

$$[(0,2)]_{\mathcal{R}} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* | (a,b)\mathcal{R}(0,2)\}$$

Ahora, $(a,b)\mathcal{R}(0,2) \iff 2 \cdot a = b \cdot 0$. Con esto se obtiene que b puede ser cualquier número natural en $\mathbb{N}^*$ (ya que para cualquier número natural se seguirá teniendo que $b \cdot 0 = 0$, mientras que a tiene que cumplir que $2 \cdot a = 0$, por lo tanto $a = 0$. Así, la clase de equivalencia esta dada por

$$[(0,2)]_{\mathcal{R}} = \{(0,c) | c \in \mathbb{N}^*\} = \{(0,1),(0,2),(0,3)...\}$$

iii) En $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \backslash \{0\})/\mathcal{R}$ (el conjunto cociente) se define la relación Ω dada por

$$[(a,b)]_{\mathcal{R}} \Omega [(c,d)]_{\mathcal{R}} \iff ad \leq cb$$

Demuestre que Ω es una relación de orden y determine si es de orden total o parcial.

Demostración

Refleja

Sea $[(a,b)]_{\mathcal{R}}$ en el conjunto cociente.

Notemos que es $[(a,b)]_{\mathcal{R}}\Omega[(a,b)]_{\mathcal{R}}$ ya que $ab = ab$ y por ende se cumple que $ab \leq ab$.

Transitiva

Sea $[(a,b)]_{\mathcal{R}}, [(c,d)]_{\mathcal{R}}, [(e,f)]_{\mathcal{R}}$ en el conjunto cociente tal que $[(a,b)]_{\mathcal{R}}\Omega[(c,d)]_{\mathcal{R}}$ y $[(c,d)]_{\mathcal{R}}\Omega[(e,f)]_{\mathcal{R}}$. Entonces, dadas las relaciones recien mencionadas se cumple que $ad \leq bc$ (1) y $cf \leq ed$ (2). Luego para demostrar que $[(a,b)]_{\mathcal{R}}\Omega[(e,f)]_{\mathcal{R}}$ se debe mostrar que $af \leq be$. Análogo a como se demostró la transitividad de $\mathcal{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
a \cdot f \cdot d &= f \cdot (a \cdot d) && \text{Usando (1)}\\
&\leq f \cdot (b \cdot c) \\
&= (f \cdot c) \cdot b && \text{Usando (2)}\\
&\leq (e \cdot d) \cdot b
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que $afd \leq ebd$ y como $d > 0$ se cancela a ambos lados obteniendo que $af \leq eb$ verificando entonces que $[(a,b)]_{\mathcal{R}}\Omega[(e,f)]_{\mathcal{R}}$

Antisimetria

Sea $[(a,b)]_{\mathcal{R}}, [(c,d)]_{\mathcal{R}}$ tal que $[(a,b)]_{\mathcal{R}}\Omega[(c,d)]_{\mathcal{R}}$ y $[(c,d)]_{\mathcal{R}}\Omega[(a,b)]_{\mathcal{R}}$.

Como $[(a,b)]_{\mathcal{R}}\Omega[(c,d)]_{\mathcal{R}}$ entonces $ad \leq cb$ y como $[(c,d)]_{\mathcal{R}}\Omega[(a,b)]_{\mathcal{R}}$ entonces $cd \leq ab$. Juntando ambas desigualdades se botiene que $ad = cb$ y por lo tanto $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$. Luego, como (a,b) esta relacionado con (c,d), entonces (por propiedad de las clases de equivalencia) se tiene que $[(a,b)]_{\mathcal{R}} = [(c,d)]_{\mathcal{R}}$.

Así ,por lo tanto Ω es una relación de orden.

P2.- i) Sean $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $x \neq y$. Pruebe sin usar inducción que

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i = \frac{x^n - y^n}{x - y}$$

Demostración

La idea es usar la geométrica, entonces intentaremos modificar la suma para obtener la expresión de la geometrica

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i &= x^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} x^{-i}y^i && x^{n-1} \text{ es constante para i}\\
&= x^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)^i && \text{Aplicamos suma geomtrica}\\
&= x^{n-1}\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)}
\end{aligned}$$

Ahora, matraqueando la expresión obtenida (sumando las fracciones y eliminando términos semejantes) se obtiene que $x^{n-1}\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{x^n - y^n}{x-y}$.

ii) Demuestre sin usar inducción que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k + i} < 1, \forall k \in \mathbb{N}$.

Desarrollo La primera idea es intentar calcular la suma que nos dan mediante alguna conocida, pero por la forma, no hemos visto en curso formas cortas de abordar ese tipo de sumas, por lo que como hay que demostrar un menor estricto, intentaremos acotar la suma que nos dan por otro que si sepamos calcular y (rezar porque) sea menor o igual a 1.

Para esto, notamos que $\frac{1}{2^k+i} < \frac{1}{2^k} \forall i = 1, ..., 2^k$. entonces podemos acotar la suma por

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k + i} < \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k}$$

Ya que cada término $\frac{1}{2^k+i}$ es menor a $\frac{1}{2^k}$.

Finalmente teniendo que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{2^k} 1 = 1.$

Por lo tanto se concluye que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k + i} < 1.$

iii) Sea a_n una secuencia de números reales tal que existe un número real $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_n - a_{n-1} = d$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Considere la suma dada por

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}$$

iii.1) Escriba S en notación de sumatoria.

iii.2) Demuestre que $S = \frac{n}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}$

Demostración

iii.1) $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$

iii.2) Al tener en S elementos consecutivos involucrados, la idea es intentar de formar una telescópica. Para esto, pero racionalicemos la expresión.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}}{a_k - a_{k+1}}$$

En donde se racionalizó por $\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}$. Ahora, por enunciado se tiene que la diferencia entre dos términos consecutivos es d, por lo tanto $a_k - a_{k+1} = -d$ constante para todo $k = 0, ..., n-1$ (ya que $a_{k+1} - a_k = d$) y entonces tenemos que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}}{a_k - a_{k+1}} = \left(-\frac{1}{d}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}$$

En esta última expresión usamos la suma telescópica con lo cual tenemos

$$\left(-\frac{1}{d}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}} = \left(-\frac{1}{d}\right) \cdot (\sqrt{a_0} - \sqrt{a_n})$$

Así, mediante igualdades hemos llegado a que

$$S = \left(-\frac{1}{d}\right) \cdot (\sqrt{a_0} - \sqrt{a_n})$$

En este punto ya hemos usado todas las propiedades de suma que podíamos invocar en la pregunta, por lo tanto ahora solo quedar *matraquear* la expresión resultante para obtener lo pedido. En específico, notamos que tiene que haber un $\sqrt{a_0} + \sqrt{a_n}$ en el denominador de la expresión que queremos llegar, por lo tanto, multiplicando por $1 = \frac{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
S &= \left(-\frac{1}{d}\right) \cdot (\sqrt{a_0} - \sqrt{a_n}) && \text{Multiplicando por } \frac{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}} \\
&= \left(-\frac{1}{d}\right) \cdot (\sqrt{a_0} - \sqrt{a_n}) \cdot \frac{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}} \\
&= \left(-\frac{1}{d}\right) \cdot \frac{a_0 - a_n}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}} && \text{Usando que } a_0 - a_n = -n \cdot d \\
&= \left(-\frac{1}{d}\right) \cdot \frac{-n \cdot d}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}} \\
&= \frac{n}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}
\end{aligned}$$

En donde se usó que $a_0 - a_n = -n \cdot d$ ya que por enunciado la diferencia entre cada término consecutivo es d, por lo tanto la diferencia entre n términos es nd.

P3.- Muestre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$\boxed{\textbf{Demostración}}$

Notamos que en la suma tenemos en el denominador términos consecutivos, por lo que la idea es intentar formar una (o más telescópicas). Con esto en mente, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+2}$$

Así, para formar la telescópica reagrupamos los términos de forma que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} && \text{Usando la telescópica} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\right] && \text{Reagrupando términos} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]
\end{aligned}$$

P4.- Definimos para $n \geq 1, q \neq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k$$

i) Demuestre sin usar inducción que

$$S_n = q(S_n - nq^n) + \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1}$$

$\boxed{\textbf{Demostración}}$

La idea es matraquear la expresión de la derecha para llegar a S_n, por ello, tenemos que

$$\begin{aligned}
q(S_n - nq^n) + \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} &= q(\sum_{k=1}^{n} kq^k - nq^n) + \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} && \text{Se aplicó definición de } S_n \\
&= q(\sum_{k=1}^{n-1} kq^k) + \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} && \text{Se usó } \sum_{k=1}^{n} kq^k - nq^n = \sum_{k=1}^{n-1} kq^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} kq^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} && \text{En k=0 la primera suma vale } 0(0 \cdot q^0 = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} kq^{k+1} + q^{k+1} && \text{Se juntan ambas sumas ya que tienen los mismos límites} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1}(k+1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} q^j \cdot j && \text{Se hizo cambio de índice j=k+1} \\
&= S_n
\end{aligned}$$

ii) Demuestre, sin usar inducción que

$$S_n = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2}$$

$\boxed{\textbf{Demostración}}$

De la igualdad de la parte i) se puede despejar S_n y se obtiene que

$$S_n = \frac{\left(q \sum_{k=0}^{n-1} q^k\right) - nq^{n+1}}{1-q}$$

Resolviendo la suma geométrica se tiene que

$$\left(q \sum_{k=0}^{n-1} q^k\right) = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Reemplazando esto en la expresión que tenemos para S_n se tiene que

$$S_n = \frac{q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}}{1-q}$$

Sumando las expresiones del numerador se tiene que

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{\frac{q - q^{n+1} - nq^{n+1}(1-q)}{1-q}}{1-q} \\
&= \frac{q - q^{n+1} - nq^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2} \\
&= \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2}
\end{aligned}$$