MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 10 de mayo de 2019.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 8: Sumas v2

P1.- i) Demuestre que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

ii) Sean A, B conjuntos numerables, de muestre que $A \times B$ también lo es.

P2.- Pruebe, sin usar inducción, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$

P3.- Calcule

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^j (k+1)}{2^{2j-1}}$$

P4.- Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ y $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_1 = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) a_i$$

P5.- **(Propuesto)** Demuestre que

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}$$

Hint: Puede puede usar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

RESUMEN

Definición 1 (Secuencia)**.** Una **secuencia de reales** es una función $a : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{N}$. Se denota por $a_i = a(i)$.

Proposición 1. *Las siguientes sumas son conocidas*

- $\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ *(Telescópica)*
- $\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$ *(suma constante)*
- $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, $a \neq 1$ *(Geométrica)*

Definición 2 (Suma conjunto de índices)**.** Sea $a : \Omega \to \mathbb{R}$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $f : [1,...,n] \to \Omega$. Definimos $b_k = a_{f(k)}$ y:

$$\sum_{k\in\Omega} a_w = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Definición 3 (Sumas dobles)**.** Se tiene que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_k b_j$$

Definición 4 (Intercambio de sumatorias)**.** Se tiene que, en una sumatoria doble, si los límites inferiores y superiores de ambas sumas no dependen de los indices, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$$

[Binomial] Para n y k enteros, $n \geq 0$.

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Teorema 1 (Binomio de Newton)**.**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$