MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 30 de abril de 2019.

Auxiliar 6: Conjunto imagen, preimagen y relaciones

P1.- Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universo y $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Considere $f : A \to B$ una función.

i) Sea $C \subseteq A$. Se define otra función $g : C \to B$ tal que $g(x) = f(x)\ \forall x \in C$. Demuestre que $\forall D \subseteq B, g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$.

Demostración

La forma común de demostrarlo es por doble inclusión, pero notemos que, fijando un $D \subseteq D$ se tiene que:
Sea $x \in g^{-1}(D)$, entonces

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}(D) &\iff x \in C \wedge (\exists y \in D, g(x) = y) && \text{Usando que f(x)=g(x) en D} \\ &\iff x \in C \wedge (\exists y \in D, f(x) = y) \\ &\iff x \in C \wedge x \in f^{-1}(D) \\ &\iff x \in C \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

Por lo tanto, que un elemento x pertenezca a $g^{-1}(D)$ es equivalente a que pertenezca a $C \cap f^{-1}(D)$. Así se concluye que $g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$,$\forall D \subseteq B$.

ii) Sean $X, Y \subseteq A$. Demuestre que si f es inyectiva, entonces

$$f(X \cap Y) = f(x) \cap f(Y)$$

Observación: Para cualquier función $f : A \to B$ se tiene que $\forall X, Y \subseteq A$ se cumple que

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$$

Luego, en esta pregunta se demuestra que la igualdad se alcanza si f es inyectiva.

Demostración

Por doble inclusión.

$\boxed{\subseteq}$ Es propiedad de cualquier función que $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $z \in f(X) \cap f(Y)$, entonces $\exists w_1 \in X$ y $w_2 \in Y$ tal que $f(x_1) = z$ y $f(w_2) = z$ (esto por la definición de que z pertenezca a $f(X)$ y $f(Y)$).
Entonces $f(w_1) = f(w_2) = z$ y por la inyectividad de f entonces $w_1 = w_2$. Entonces $w_1 \in X \cap Y$ y $f(w_1) = z$, por lo tanto $z \in f(X \cap Y)$.
Por tanto $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$.

P2.- Se considera en el conjunto $\mathbb{N}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$a\mathcal{R}b \iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = 2n$$

i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Demostración

Una relación es de equivalencia si es refleja, transitiva y simétrica.

Refleja

Sea $a \in \mathbb{N}$, entonces $a - a = 0 = 2 \cdot 0$, por lo tanto tomando $n = 0$ se tiene que $a - a = 2 \cdot n$ y así $a\mathcal{R}a$.

Transitiva

$\mathcal{R}$ es transitiva si $\forall a, b, c$ tal que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ entonces $a\mathcal{R}c$.
Sea $a, b, c \in \mathbb{N}$ tal que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$, entonces $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = 2n_1$ y $b - c = 2n_2$. Sumando ambas igualdades se tiene que $a - c = 2(n_1 - n_2)$ y $n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $a\mathcal{R}c$.

Simetría $\mathcal{R}$ es simetrica ssi $\forall x, y \in \mathbb{N}, a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$.
Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $a\mathcal{R}b$. Entonces $\exists n_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = 2n_1$, multiplicando por -1 se tiene que $b - a = -2n_1 = 2 \cdot (-n_1)$ con $-n_1 \in \mathcal{Z}$ y así, $b\mathcal{R}a$.
Así, como $\mathcal{R}$ es refleja, simetrica y transitiva entonces $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

ii) Determine el conjunto cuociente $\mathbb{N}/\mathcal{R}$.

Demostración

Determinar el conjunto cociente significa determinar todas las clases de equivalencia que componen el conjunto cociente.

Primero notamos que la relación $\mathcal{R}$ esta definida como la congruencia modulo 2 ($\equiv_2$) y por propiedad de las relaciones de congruencia, se tiene que existen 2 clases de equivalencia en el cociente. (Dada la relación $\equiv_n$, el conjunto cociente de la relación $\equiv_n$ tiene n elementos, es decir, n clases de equivalencia).

Con esto, sea $a \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{N} \mid a\mathbb{R}x\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathcal{R}, a - x = 2n\}$$

En donde la última igualdad se tiene por la forma en que esta definida $\mathcal{R}$.

Así los elementos que están en la clase de equivalencia de a son los números que restados con a da un número par (recordar que $2n$ es la caracterización genérica de un número par). Con esto, si a es par, entonces solo los números pares estan relacionados con él ($par - par = par$) y si a es impar, solo los números impares están relacionados con él ($impar - impar = impar$). Así las dos clases de equivalencia estan dadas por:

- $[a]_{\mathcal{R}} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10...\}$ si a es par.
- $[a]_{\mathcal{R}} = \{1, 3, 5, 7, 9, 1...\}$ si a es impar.

iii) **(Propuesto)** Demuestre que si se cambia $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{N}$ en la definición de $\mathcal{R}$ entonces es relación de orden. Es decir, que la relación $a\mathcal{R}b \iff \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $a - b = 2n$ es de orden. ¿Es orden total o parcial?

HINT: Para ver si es de orden parcial o total, considere el caso en que a es par y b es impar, ¿$\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $a - b = 2n$ o $b - a = 2n$?

P3.- Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Se define en A la relación Ω dada por $x\Omega y \iff f(x) \leq f(y)$. Demuestre que Ω es relación de orden en A. ¿Es orden total o parcial?

Demostración

Una relación es de orden si es refleja, transitiva y antisimetrica.

Refleja: Sea $a \in A$, como f es función entonces se cumple que $f(a) \leq f(a)$ (ya que en específico se cumple la igualdad). Con esto se verifica que $a\Omega a, \forall a \in A$.

Transitiva: Sea $a, b, c \in A$ tal que $a\Omega b$ y $b\Omega c$, entonces $f(a) \leq f(b)$ y $f(b) \leq f(c)$. Luego por transitivdad del $\leq$ se tiene que $f(a) \leq f(c)$, con lo cual $a\Omega c$.

Antisimetria: Sea $a, b \in A$ tal que $a\Omega b$ y $b\Omega a$. Entonces $f(a) \leq f(b)$ y $f(b) \leq f(a)$, por lo que $f(a) = f(b)$ y como f es inyectiva, entonces $a = b$.

Luego, como se cumplen las tres propiedades se tiene que la relació es de orden.

Finalmente, para ver si la relación es de orden total o parcial, como les comente en auxiliar lo primero es preguntarse, ¿Que pasa si la relación no es de orden total? Entonces existen elementos $a, b \in \mathbb{N}$ tal que a no esta relacionado con b, ni b esta relacionado con a, entonces se tendría que $f(a) > f(b)$ (ya que a no esta relacionado con b) y $f(b) > f(a)$ (ya que b no esta relacionado con a. Entonces se tendría que $f(a) > f(b)$ y $f(b) < f(a)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto como al asumir que existen elementos que no están relacionados entre si se llego a una contradicción, se debe cumplir que todo par de elementos esta relacionado y así la relación es de orden total.

P4.- Sea X, Y conjuntos, y $f : X \to Y$ una función inyectiva. Ahora, sea Ω una relación de equivalencia definida sobre Y. Se define en X la relación preimagen de Ω que denotamos Ω^{-1} por:

$$x_1\Omega^{-1}x_2 \iff f(x_1)\Omega f(x_2)$$

i) Pruebe que Ω^{-1} es una relación de equivalencia en X.

Demostración

Primero, notamos que por enunciado Ω es una relación de equivalencia sobre Y. Por lo tanto Ω cumple que es refleja, transitiva y simetrica, siendo estas propiedades las que vamos a usar fuertemente en esta parte de la pregunta.

Veamos que la relación es de equivalencia.

Refleja: Sea $a \in X$, a esta relacionada con ella misma según la relación Ω^{-1} ssi $f(a)\Omega f(a)$. Ahora, como Ω es rel. de equivalencia sobre Y, y $f(a) \in Y$, entonces se cumple que $f(a)\Omega f(a)$ y así se cumple que $a\Omega^{-1}a$.

$\boxed{\text{Transitiva}}$ Sean $a, b, c \in X$. PDQ: Si $a\Omega^{-1}b$ y $b\Omega^{-1}c$, entonces $a\Omega^{-1}c$.
Como $a\Omega^{-1}b$ y $b\Omega^{-1}c$, entonces se cumple que $f(a)\Omega f(b)$ y $f(b)\Omega f(c)$, luego como Ω es transitiva entonces $f(a)\Omega f(c)$ y así se tiene que $a\Omega^{-1}c$.

$\boxed{\text{Simetrica}}$ Sean $a, b \in X$ tal que $a\Omega^{-1}b$ y $b\Omega^{-1}a$. PDQ: $a = b$.
En efecto, si $a\Omega^{-1}b$ y $b\Omega^{-1}a$, entonces se cumple que $f(a)\Omega f(b)$ y $f(b)\Omega f(a)$ y como Ω es simetrica (ya que es rel. de equivalencia) entonces $f(a) = f(b)$, y por inyectividad de f entonces $a = b$.
Así se concluye que Ω^{-1} es relación de equivalencia.

ii) Probar que $[x]_{\Omega^{-1}} = f^{-1}([f(x)]_\Omega)$ para todo $x \in X$.

$\boxed{\text{Demostración}}$

Se hará por doble inclusión. Sea $x \in X$

$\boxed{\subseteq}$ Sea $a \in [x]_{\Omega^{-1}}$, entonces se tiene que $x\Omega^{-1}a$ y entonces $f(x)\Omega f(a)$, por lo tanto $f(a) \in [f(x)]_\Omega$ (ya que $f(a)$ esta relacionado con $f(x)$ según Ω, entonces como $f(a) \in [f(x)]_\Omega \implies f^{-1}(f(a)) \in f^{-1}([f(x)]_\Omega)$ y como f es inyectiva, entonces $f^{-1}(f(a)) = a$ y así $a \in f^{-1}([f(x)]_\Omega)$. Como esto se cumple $\forall a \in [x]_{\Omega^{-1}}$, entonces $[x]_{\Omega^{-1}} \subseteq f^{-1}([f(x)]_\Omega)$.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $a \in f^{-1}([f(x)]_\Omega)$, entonces a esta en el conjunto preimagen del conjunto $[f(x)]_\Omega$, por lo que se tiene que $f(a) \in [f(x)]_\Omega$. Entonces $f(a)\Omega f(x)$. Con esto se tiene que $a\Omega^{-1}x$ (ya que $a\Omega^{-1}x \iff f(a)\Omega f(x)$) y así $a \in [x]_{\Omega^{-1}}$. Concluimos por ende que $f^{-1}([f(x)]_\Omega) \subseteq [x]_{\Omega^{-1}}$.
Demostradas ambas inclusiones se tiene que $f^{-1}([f(x)]_\Omega) = [x]_{\Omega^{-1}}$

P5.- (Propuesto) Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}\backslash\{0\}$ por $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff ad = bc$.

i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Determine la clase de equivalencia del elemento $(0, 2)$.

iii) En $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}\backslash\{0\})/\mathcal{R}$ (el conjunto cuociente) se define la relación Ω dada por

$$[(a, b)]_\mathcal{R}\Omega[(c, d)]_\mathcal{R} \iff ad \leq cb$$

Demuestre que Ω es una relación de orden y determine si es de orden total o parcial.

RESUMEN

Definición 1 (Conjunto imagen)**.** Sea f: $A \to B$ una función, y sea $A' \subseteq A$. Definimos el conjunto imagen de A' por f como:

$$f(A') = \{f(x) \in B : x \in A'\}$$

Definición 2. Sea f: $A \to B$ una función y sea $B' \subseteq B$. Definimos el conjunto preimagen de B' por f como:

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

Proposición 1. *Sea f: $A \to B$ una función, $A_1, A_2 \subseteq A$ y $B_1, B_2 \subseteq B$*

- $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- *Si f: $A \to B$ epiyectiva $\implies$ f(A) = B*

Definición 3 (Relación)**.** Una tripleta de conjuntos *(A,B,R)* es una **relación** si $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Denotaremos por $a\mathcal{R}b$ si $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Proposición 2. *Se dice que la relación $\mathcal{R}$ en A es:*

Refleja: *Si $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$.*

Simétrica: *Si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.*

Antisimétrica: *Si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \implies x = y$.*

Transitiva: *Si $\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.*

Definición 4 (Divisibilidad)**.** En $\mathbb{Z}$ se define la relación de **divisibilidad**, que se denota por a|b si existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $q = ba$. En ese caso, se dice que b es divisible por a.

Definición 5 (R. de orden)**.** Se dice que $\mathcal{R}$ es una **relación de orden**, si es refleja, transitiva y antisimétrica.

Definición 6 (R. de equivalencia)**.** $\mathcal{R}$ es una **relación de equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva.

Definición 7 (Clase de equivalencia)**.** Dado un elemento $a \in A$, definimos la **clase de equivalencia** asociada a R como el conjunto

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{a \in A, a\mathcal{R}x\}.$$

Además, se cumple que $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq A$.

Definición 8 (Conjunto cuociente)**.** Al conjunto de la clases de equivalencia de una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ se le llama **conjunto cuociente**, y se denota por $A/\mathcal{R}$. Esto es $A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$.

Definición 9 (Congruencia)**.** Decimos que $a \equiv_n b$, con $n \in \mathbb{N}$, si $a - b = nk$, con $k \in \mathbb{Z}$.