MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 29 de abril de 2019.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 6: Conjunto imagen, preimagen y relaciones

P1.- Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universo y $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Considere $f : A \to B$ una función.

i) Sea $C \subseteq A$. Se define otra función $g : C \to B$ tal que $g(x) = f(x)\ \forall x \in C$. Demuestre que $\forall D \subseteq B, g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$.

ii) Sean $X, Y \subseteq A$. Demuestre que si f es inyectiva, entonces

$$f(X \cap Y) = f(x) \cap f(Y)$$

Observación: Para cualquier función $f : A \to B$ se tiene que $\forall X, Y \subseteq A$ se cumple que

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$$

Luego, en esta pregunta se demuestra que la igualdad se alcanza si f es inyectiva.

P2.- Se considera en el conjunto $\mathbb{N}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$a\mathcal{R}b \iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = 2n$$

i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Determine el conjunto cuociente $\mathbb{N}/\mathcal{R}$.

iii) **(Propuesto)** Demuestre que si se cambia $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{N}$ en la definición de $\mathcal{R}$ entonces es relación de orden. Es decir, que la relación $a\mathcal{R}b \iff \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $a - b = 2n$ es de orden. ¿Es orden total o parcial?

P3.- Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Se define en A la relación Ω dada por $x\Omega y \iff f(x) \leq f(y)$. Demuestre que Ω es relación de orden en A. ¿Es orden total o parcial?

P4.- Sea X, Y conjuntos, y $f : X \to Y$ una función. Ahora, sea Ω una relación de equivalencia definida sobre Y. Se define en X la relación preimagen de Ω que denotamos Ω^{-1} por:

$$x_1\Omega^{-1}x_2 \iff f(x_1)\Omega f(x_2)$$

i) Pruebe que Ω^{-1} es una relación de equivalencia en X.

ii) Probar que $[x]_{\Omega^{-1}} = f^{-1}([f(x)]_\Omega)$ para todo $x \in X$.

P5.- **(Propuesto)** Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}\backslash\{0\}$ por $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff ad = bc$.

i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Determine la clase de equivalencia del elemento $(0, 2)$.

iii) En $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}\backslash\{0\})/\mathcal{R}$ (el conjunto cuociente) se define la relación Ω dada por

$$[(a, b)]_\mathcal{R}\Omega[(c, d)]_\mathcal{R} \iff ad \leq cb$$

Demuestre que Ω es una relación de orden y determine si es de orden total o parcial.

RESUMEN

Definición 1 (Conjunto imagen)**.** Sea f: $A \to B$ una función, y sea $A' \subseteq A$. Definimos el conjunto imagen de A' por f como:

$$f(A') = \{f(x) \in B : x \in A'\}$$

Definición 2. Sea f: $A \to B$ una función y sea $B' \subseteq B$. Definimos el conjunto preimagen de B' por f como:

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

Proposición 1. *Sea f: $A \to B$ una función, $A_1, A_2 \subseteq A$ y $B_1, B_2 \subseteq B$*

- $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- *Si f: $A \to B$ epiyectiva $\implies$ f(A) = B*

Definición 3 (Relación)**.** Una tripleta de conjuntos *(A,B,R)* es una **relación** si $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Denotaremos por $a\mathcal{R}b$ si $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Proposición 2. *Se dice que la relación $\mathcal{R}$ en A es:*

Refleja: *Si $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$.*

Simétrica: *Si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.*

Antisimétrica: *Si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \implies x = y$.*

Transitiva: *Si $\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.*

Definición 4 (Divisibilidad)**.** En $\mathbb{Z}$ se define la relación de **divisibilidad**, que se denota por a|b si existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $q = ba$. En ese caso, se dice que b es divisible por a.

Definición 5 (R. de orden)**.** Se dice que $\mathcal{R}$ es una **relación de orden**, si es refleja, transitiva y antisimétrica.

Definición 6 (R. de equivalencia)**.** $\mathcal{R}$ es una **relación de equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva.

Definición 7 (Clase de equivalencia)**.** Dado un elemento $a \in A$, definimos la **clase de equivalencia** asociada a R como el conjunto

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{a \in A, a\mathcal{R}x\}.$$

Además, se cumple que $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq A$.

Definición 8 (Conjunto cuociente)**.** Al conjunto de la clases de equivalencia de una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ se le llama **conjunto cuociente**, y se denota por $A/\mathcal{R}$. Esto es $A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$.

Definición 9 (Congruencia)**.** Decimos que $a \equiv_n b$, con $n \in \mathbb{N}$, si $a - b = nk$, con $k \in \mathbb{Z}$.