MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 14 de abril de 2019.

Auxiliar 4: Funciones y conjunto potencia

We know no king but the king in the north whose name is Stark

RESUMEN SEMANA 5

Definición 1 (Inyectividad)**.** Diremos que una $f\colon A \to B$ es **inyectiva** si se cumple que:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Obs: Esto nos dice que los elementos de B que tengan preimagen, esta es única, pero no necesariamente todo elemento de B tiene preimagen.

Definición 2 (Epiyectividad)**.** Diremos que una función $f{:}A \to B$ es **epiyectiva** si se cumple que:

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$

Obs: Esto nos dice que todo elemento de B tiene preimagen, pero esta no es necesariamente única.

Definición 3 (Biyectividad)**.** Diremos que una función $f{:}A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y epiyectiva a la vez.

Definición 4 (Inversa)**.** Si una función $f{:}A \to B$ es biyectiva, entonces la **función inversa** $f^{-1}\colon B \to A$ existe y esta definida como:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Definición 5 (Composición)**.** sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones. La composición de f y g, denotada por $g \circ f$, se define como una función de A en C dada por:

$$\forall x \in A, (gof)(x) = g(f(x))$$

Proposición 1. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones, entonces se cumple que:*

- *Si $f(x)$ es biyectiva, entonces $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A$*
- *Si $f(x)$ es biyectiva, entonces $f^{-1}(f(y)) = y, \forall y \in B$*
- *$(g\ o\ f)(x)$ inyectiva $\implies$ $f(x)$ inyectiva*
- *$(g\ o\ f)(x)$ epiyectiva $\implies$ $g(x)$ epiyectiva*

P1.-
- **(Prop. 4.13)** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Se tiene que:
  iv) $g \circ f$ inyectiva $\implies$ f inyectiva
  v) $g \circ f$ epiyectiva $\implies$ g epiyectiva
- **(Prop. 4.16)** Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones biyectivas, entonces se tiene que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

P2.- Sea $U \neq \phi$ un conjunto universo con al menos dos elementos. Se define la función $f : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ por $F(X,Y) = X \backslash Y$ para cada $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U)$. Estudie la inyectividad y epiyectividad de f.

Indicación: Si su respuesta es afirmativa, debe demostrarlo. Si es negativa, debe exhibir un contraejemplo.

P3.- Sea A un conjunto con al menos dos elementos.

$$\begin{aligned} f :& A \times A \to A \\ & (x,y) \to f(x,y) = x \\ g :& A \to A \times A \\ & x \to g(x) = (x,x) \end{aligned}$$

- Demuestre que $f \circ g = id_A$
- Determine si f, g son inyectivas, epiyectivas, biyectivas.
- ¿Es $g \circ f = id_{A \times A}$?

P4.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = x + 1$.

i) Demuestre que f es biyectiva.
ii) Demuestre que es falso que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

P5.- Sea $f : [3, \infty) \to [2, \infty)$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 1$. Demuestre que f es biyectiva y encuentre su inversa.