

PAUTA AUXILIAR (3-1)=2

$$a_1 = 2 \text{ y } a_{n+1} = \frac{12}{1+a_n} \quad \forall n \geq 1.$$

(a) PDQ: $a_{2n-1} < a_{2n+1}, \forall n \geq 1.$

• Caso base Si $n=1$, entonces $a_{2 \cdot 1 - 1} = a_1 = 2$ y

$$a_{2 \cdot 1 + 1} = a_3 = \frac{12}{1+a_2} = \frac{12}{1+\frac{12}{1+2}} = \frac{36}{15} > 2.$$

$$\therefore a_1 = 2 < \frac{36}{15} = a_3 //$$

• Paso inductivo H.I.: $\exists n \geq 1$ t.q. $a_{2n-1} < a_{2n+1}$
 PDQ: $a_{2(n+1)-1} < a_{2(n+1)+1}$
 Partiendo de la H.I., tenemos que $\Rightarrow a_{2n+1} < a_{2n+3}$
 (se cumple para $n+1$)

(1) $a_{2n-1} < a_{2n+1}$ | Sumar 1 a ambos lados no afecta la desigualdad
 $\Rightarrow a_{2n-1} + 1 < a_{2n+1} + 1$

(2) $\frac{1}{a_{2n-1}+1} > \frac{1}{a_{2n+1}+1}$ | Por como se construye a_n , se tiene que $a_n > 0 \forall n \geq 1 \Rightarrow$ elevar a -1 invierte la desigualdad
 Multiplicamos por 12

$$\frac{12}{1+a_{2n-1}} > \frac{12}{1+a_{2n+1}}$$

$$a_{2n} > a_{2n+2}$$

$\Rightarrow a_{2n} < a_{2n+1}$, Realizando los mismos pasos (1), (2), (3) y (4) con esta desigualdad se llega a que $a_{2n+1} < a_{2n+3} //$

(b) PDQ: $a_{2n} > 3 \quad \forall n \geq 1$.

C.B) $n=1$. Si $n=1$ entonces $a_2 = \frac{12}{1+a_1} = \frac{12}{2} = 6 > 3 \quad \checkmark$

P.H) HI: $\exists n \geq 1$ tq $a_{2n} > 3$.

PDQ: Se cumple PARA $n+1$ que $a_{2(n+1)} > 3$.

En efecto, PARTIENDO DE LA hipótesis inductiva se tiene que

$a_{2n} > 3$, luego $a_{2n+1} = \frac{12}{1+a_{2n}} < 3$

ya que $a_{2n} > 3$
 $\Rightarrow 1+a_{2n} > 4$
 $\Rightarrow \frac{12}{1+a_{2n}} < \frac{12}{4} = 3$

y así, $a_{2(n+1)} = \frac{12}{1+a_{2n+1}} > 3$

$\therefore a_{2(n+1)} > 3 \quad \parallel$

ya que $a_{2n+1} < 3$
 $\Rightarrow a_{2n+1} + 1 < 4$
 $\Rightarrow \frac{12}{1+a_{2n+1}} > \frac{12}{4} = 3$

P2) PDQ: $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1} \quad (*)$

C.B) Si $n=1$, entonces (*) queda como $\frac{1}{1 \cdot 5}$

y por otro lado $\frac{1}{4 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ Se cumple PARA $n=1$.

$n \Rightarrow n+1$) HI: $\exists n \geq 1$ tq $\frac{1}{1 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

PDQ: $\frac{1}{1 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)} = \frac{(n+1)}{4(n+1)+1}$

(1)

ando la hipótesis inductiva para los primeros n sumandos
 se (2) se tiene que

$$\underbrace{\frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}}_{= \frac{n}{4n+1} \text{ POR H.I.}} + \frac{1}{4(n+1)-3(4(n+1)+1)} = \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)}$$

$$= \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{1}{4n+1} \left(n + \frac{1}{4n+5} \right)$$

$$= \frac{1}{4n+1} \cdot \frac{4n^2 + 5n + 1}{4n+5}$$

$$\overset{4n^2 + 5n + 1 = (4n+1)(n+1)}{\text{}} = \frac{1}{4n+1} \cdot \frac{(4n+1)(n+1)}{4n+5}$$

$$= \frac{n+1}{4n+5} = \frac{n+1}{4(n+1)+1}$$

$$\therefore \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)} = \frac{n+1}{4(n+1)+1} \quad \parallel$$

P3/ (i) PDQ: $A \subseteq B$.

Por hipótesis se tiene que $A \cap W \subseteq B \cap W$ y $A \cap W^c \subseteq B \cap W^c$
 Luego, la unión de subconjuntos respeta la inclusión, y así:

$$(A \cap W) \cup (A \cap W^c) \subseteq (B \cap W) \cup (B \cap W^c) \quad \text{USANDO DISTRIBUTIVIDAD DE } \cup \text{ RESPECTO } \cap.$$

$$\Leftrightarrow A \cap \underbrace{(W \cup W^c)}_U \subseteq B \cap \underbrace{(W \cup W^c)}_U$$

$$\Leftrightarrow A \cap U \subseteq B \cap U \quad \text{POR ENUNCIADO } A, B \subseteq U \Rightarrow A \cap U = A \text{ y } B \cap U = B$$

$$\therefore A \subseteq B //$$

Obs: Se tiene que $X \subseteq Y$
ssi: $\forall x \in X \Rightarrow x \in Y$.

ii) Hipótesis: $(A \cap B) \subseteq C$

$$PDQ: (A \cap C^c) \subseteq B^c$$

Veamos que todo elemento de $A \cap C^c$ está en B^c

$$\text{Sea } x \in A \cap C^c \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in C^c)$$

Como $x \in C^c \Rightarrow x \notin C$ y por lo tanto $x \notin A \cap B$ ya que por hipótesis $A \cap B \subseteq C$.

Luego, como $x \notin A \cap B$ pero $x \in A$ entonces $x \notin B$.

$$\text{Como } x \notin B \Rightarrow x \in B^c$$

$$\therefore \forall x \in A \cap C^c, x \in B^c \Rightarrow A \cap C^c \subseteq B^c //$$

P4) PDQ: $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

En efecto, $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ Def. de $A \Delta B$
 $(*) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)$ Asociando

$$\begin{aligned} &= [(B^c \cap A) \cup (B^c \cap C)] \cup [(B \cap A^c) \cup (B \cap C^c)] \\ &= [B^c \cap (A \cup C)] \cup [B \cap (A^c \cup C^c)] \quad \text{color: red } / \quad \overbrace{X \cup (B \cap B^c)}^{\emptyset} = X \\ &= [(B^c \cap (A \cup C)) \cup (B \cap B^c)] \cup [(B \cap (A^c \cup C^c)) \cup (B \cap B^c)] \\ &= [B^c \cap (A \cup C \cup B)] \cup [B \cap (A^c \cup C^c \cup B^c)] \quad \text{color: red } / \quad \text{Distribuyendo} \end{aligned}$$