MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 29 de marzo de 2019.

Auxiliar 2: Inducción y conjuntos

P1.- Se define por recurrencia la colección de reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la siguiente forma:

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{12}{1+a_n}, \forall n > 1.$$

Demuestre por inducción que:

a) $\forall n \geq 1, a_{2n-1} < a_{2n+1}$
b) $\forall n \geq 1, a_{2n} > 3$

P2.- Demuestre mediante inducción que $\forall n \geq 1$

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + ... + \frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

P3.- i) Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universo y $A, B, W \subseteq \mathbb{U}$ no vacío.
Si se cumple que $(A \cap W) \subseteq (B \cap W)$ y $(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)$ demuestre que $A \subseteq B$.

ii) Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universo y $A, B, C \subseteq \mathbb{U}$ no vacios.
Demuestre que $[(A \cap B) \subseteq C] \implies [(A \cap C^c) \subseteq B^c]$

P4.- Sean $A, B, C \subseteq U$ no vacíos con U un conjunto universo. Demuestre que

$$(A\Delta B) \cup (B\Delta C) = (A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B \cap C)$$

P5.- (Inducción fuerte)

Sea a_n una secuencia de números reales positivos que cumplen que $a_{j+k} \leq a_j + a_k, \forall i, j \in \mathbb{N}^*$. Demuestre mediante inducción que

$$a_n \leq a_1 + \frac{a_2}{2} + ... + \frac{a_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Hint: Piense en todas las formas que puede descomponer el número $n+1$ como suma de dos naturales.

P6.- (Propuesto) Sea U un conjunto universo, $A, B \subseteq U$ y $A \neq \phi$. Para un conjunto $X \subseteq U$ se define un nuevo conjunto $C(X)$ como sigue:

$$C(X) = \begin{cases} X\backslash B & \text{si } A \cap X \neq \phi \\ X \cup B & \text{si } A \cap X = \phi \end{cases}$$

Demuestre que

i) $C(B) \in \{\phi, B\}$
ii) Para $X, Y \subseteq U, [(X \cap Y) \cap A \neq \phi] \implies [C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)]$.
iii) $C(A) = A\backslash B$ y que $C(A)^c = C(A^c)$

P7.- (Propuesto) Demuestre que la proposición $(\exists y)(p(y) \implies (\forall x), p(x))$ es una tautología. Además, escriba la negación de la proposición.