MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 27 de marzo de 2019.

Pauta auxiliar 1

Dudas: bjauregui@dim.uchile.cl

P1.- Demuestre que las siguientes proposiciones son tautología usando demostración exploratoria.

i) $[(\overline{p} \vee q) \vee (\overline{s} \wedge \overline{p})] \iff (p \implies q)$

Demostración

Para demostrar la equivalencia, lo haremos por doble implicancia, recordando que $(p \iff q) \iff (p \implies q) \wedge (q \implies p)$. Para ahorrar espacio denotaremos a $(\overline{p} \vee q) \vee (\overline{s} \wedge \overline{p})$ como (1) y a $(p \implies q)$ como (2)

1) **pdq:** $(1) \implies (2)$.
Partiremos dándole valores de verdad a (1).
Primero, si (1) es falso, es directo que $(1) \implies (2)$ es verdad.
Luego, si (1) es verdad, entonces debemos probar que (2) también lo es.
En efecto, como (1) es verdad, entonces se tiene que $(\overline{p} \vee q)$ o $(\overline{s} \wedge \overline{p})$ son verdad. Hay que probar que verificar que en cualquier caso (2) es verdad.
   1.1) Si $(\overline{p} \vee q)$ es verdad, entonces $\overline{p}$ o q son verdad. Si $\overline{p}$ es verdad, entonces p es falso y por lo tanto (2) es verdad (ya que tendríamos $F \implies q$). Si q es verdad también se tiene que (2) es verdad ya que se tiene $p \implies V$.[1].
   1.2) Si $\overline{s} \wedge \overline{p}$ es verdad, entonces $\overline{p}$ también lo es y así nuevamente se tiene que (2) es verdad.
2) **pdq:**$(2) \implies (1)$
Si (2) es falso es directo que el implica es verdad. Si (2) es verdad, recordando la caracterización de la implicancia tenemos que $p \implies q$ es verdad y por lo tanto,

$$\begin{aligned} (1) &\iff (\overline{p} \vee q) \vee (\overline{s} \wedge \overline{p}) \\ &\iff V \vee (\overline{s} \wedge \overline{p}) \\ &\iff V \end{aligned}$$

Así, si (2) es verdad, también lo es (1) y por lo tanto $(2) \implies (1)$ también lo es.
Así, hemos llegado que independiente del valor de verdad de (2), $(2) \implies (1)$ es siempre verdad, terminando la demostración por exploración.

Finalmente, como se demotró por exploración que $(2) \implies (1)$ y $(1) \implies (2)$ entonces se concluye que $(1) \iff (2)$.

ii) $[(p \implies \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge s] \implies \overline{p}$

Demostración

Recordando la contrarecíproca, que nos dice que $(p \implies q) \iff (\overline{q} \implies \overline{p})$, entonces demostraremos el implica por contraciproca, es decir, se demotrará que $p \implies \overline{[(p \implies \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge s]}$.
Asignandole de verdad a p tenemos que

1) Si p es falso entonces se tiene que el implica es verdad (Como habrán notado, en caso en que el lado izquierdo del implica es falso se argumenta siempre de la misma forma, solo basta mencionarlo)
2) Si p es verdad, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{[(p \implies \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge s]} &\iff [(p \wedge p) \vee (p \wedge \overline{q}) \vee \overline{s}] && \text{L. de Morgan y Carac. del implica} \\ &\iff (V \wedge q) \vee (V \wedge \overline{q}) \vee \overline{s} && \text{p es verdad} \\ &\iff q \vee \overline{q} \vee \overline{s} && V \wedge q \iff q \\ &\iff V && q\overline{q} \iff V \end{aligned}$$

Con lo cual si p es verdad $\overline{[(p \implies \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge s]}$ también lo es y por lo lo tanto $p \implies \overline{[(p \implies \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge s]}$ es verdad. □

[1]Recordar que la única combinación de valores de verdad que hace falso al implia es $V \implies F$, por lo tanto si se tiene que $p \implies q$ y p es falso, entonces es directo que el implica es vdd, al igual que si q es falso

Así, independiente del valor de verdad de p el implica es siempre verdad, con lo cual terminamos la demostración por exploración.

P2.- Demuestre por contradicción que la siguiente proposición es tautología.

$$\left[(p \implies q) \wedge (\overline{s} \implies \overline{t})\right] \implies \left[\overline{p} \vee \overline{t} \vee (q \wedge s)\right]$$

$\boxed{\text{Demostración}}$ Nuevamente para ahorrar notación denotaremos a $(p \implies q) \wedge (\overline{s} \implies \overline{t})$ y $\overline{p} \vee \overline{t} \vee (q \wedge s)$ por (1) y (2), respectivamente.

Para demostrar por contradicción que (1) $\implies$ (2) asumiremos que (1) es verdad y (2) es falsa.

En efecto, si (1) es verdad, entonces $p \implies q$ y $\overline{s} \implies \overline{t}$ son ambas verdad.

Por otro lado, si (2) es falso entonces se tiene que

- $\overline{p}$ es falso $\implies$ p es verdad.
- $\overline{t}$ es falso $\implies$ t es verdad.
- $q \wedge s$ es falso $\implies$ q es falso o s es falso.

Respecto al último punto, veamos que independiente de si q o s son falsas, en ambos casos se llega a una contradicción.

En efecto, si q es falsa, como también se tiene que p es verdad, entonces $p \implies q$ es falso, pero eso es una contradicción ya que como también asumimos que (1) es verdad, se tiene que $p \implies q$ tiene que ser verdad.

Y si s es falso, como también se tiene que t es verdad, entonces $\overline{s} \implies \overline{t}$ es falso, pero eso contradice el hecho que (1) sea verdad, ya que si (1) es verdad, $\overline{s} \implies \overline{t}$ debe ser verdad.

Así, hemos llegado a una contradicción asumiendo que (1) es verdad y (2) es falso, la cual es la única combinación que hace falsa a (1) $\implies$ (2). Por lo tanto, (1) $\implies$ (2) es tautología. $\square$

P3.- a) Sea F un conjunto de personas que se encuentran esperando en la fila de un banco para ser atendidas. Para $x, y \in F$ se define la función proposicional $\xi(x, y)$: "La persona x esta delante de la persona y en la fila".

Sea $p \in F$ una persona de la fila. Determine la posición que ocupa la persona en la fila para las siguientes proposiciones cuantificadas.

i) $(\forall x \in F)(\xi(p, x) \vee x = p)$

$\boxed{\text{Interpretación}}$

La proposición nos dice que toda persona en la fila esta delante de p $(\xi(x, p))$ o que la persona es p. Así, p esta en la última posición de la fila.

ii) $(\forall x \in F)(\xi(x, p) \vee x = p)$

$\boxed{\text{Interpretación}}$

La proposición nos dice que p esta delante de toda persona en la fila $(\xi(p, x))$, así, p es el primero de la fila.

iii) $(\exists! x \in F)([\xi(p, x) \vee \xi(x, p)] \wedge \overline{[(\xi(x, p) \wedge \xi(p, x)]})$.

$\boxed{\text{Interpretación}}$

Con esto, la proposición $(\xi(x, p) \vee \xi(p, x))$ nos dice que existe una única persona (digamos x0) que esta delante de p o que p esta delante de ella. Para la segunda proposición $(\overline{\xi(x, p) \wedge \xi(p, x)})$ usando Morgan tenemos que $(\overline{\xi(x, p) \wedge \xi(p, x)}) \iff (\overline{\xi(x, p)} \vee \overline{\xi(p, x)})$. Con esto, esa persona x0 es la única que además no esta delante de p $(\overline{\xi(x, p)})$ o es la única persona que esta delante de p $(\overline{xi(p, x)})$.

En resumen, la proposición nos dice que existe una única persona que esta delante de p O p esta delante de ella, y además esa es la única persona que p delante de ella, o que ella esta delante de p. De la combinación descrita, para que tenga sentido se tienen 2 casos posibles:

- ⋄ p es la única persona que esta delante de x y x es la única persona que esta detrás de p.
- ⋄ x es la única persona que esta delante de p y p es la única persona que esta detrás de x.

El tema es que para que esta proposición pueda ser verdad, tenemos que pedir que hayan solo dos personas en la fila ya que si hay más de dos personas esta proposición es falsa, ya que no se cumple la unicidad del x en F.

Piensen en la fila x_1 - x_2 - p donde x1 y x2 son personas. En este caso, tanto x1 como x2 cumplen que $\Big((\xi(x,p) \vee \xi(p,x)) \wedge (\overline{\xi(x,p) \wedge \xi(p,x)})\Big)$, por lo cual no se cumple que haya un único elemento de la fila que me cumpla la proposición (para que una proposición cuantificada sea verdad, tanto el cuantificador como la función proposicional deben ser verdad, siendo en este caso el cuantificador el que hace falsa la proposición ya que no existe un único elemento de la fila que cumple la proposición, sino dos), entonces para filas con más de 2 personas no hay forma que la proposición de la P3 iii) sea verdad, por lo cual deben haber solo dos personas en la fila, siendo p la primera o la segunda.

b) Sea p una proposición lógica y $q(x)$ una función proposicional. Si llamamos τ a la proposición $(\forall x)(p \implies q(x))$, determine el valor de verdad de p sabiendo que τ es falsa.

$\boxed{\text{Desarrollo}}$

Si $(\forall x)(p \implies q(x))$ es falsa, entonces se tiene que su negación en verdad, con los cual $\overline{(\forall x)(p \implies q(x))} \iff (\exists x)\overline{(\overline{p} \vee q(x)} \iff (\exists x)(p \wedge \overline{q(x)}$ es verdad, por lo tanto existe un x tal que $p \wedge \overline{q(x)}$ es verdad, y así p es verdad (ya que si p fuese falso $p \wedge \overline{q(x)}$ es falso para todo x, pero por lo anterior se que existe un x que hace verdadera a la proposición. $\square$

c) Demuestre que la proposición $(\exists y)(p(y) \implies (\forall x), p(x))$ es una tautología. Además, escriba la negación de la proposición.

P4.- i) Pruebe por inducción que $\forall n \geq 1$, $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24. $\boxed{\text{Demostración}}$

- Caso base $n = 1$. Si $n = 1$ entonces se tiene $2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 5^1 - 5 = 24$ es divisible por 24.
- Paso inductivo
  Asumimos como hipótesis inductiva que $\exists n \geq 1$ tal que $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24. Con esto, tenemos que demostrar que la proposición se cumple también para $n+1$, es decir, que $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5$ es divisible por 24.
  En efecto, para demostrar que se cumple la hipótesis para $n+1$ el primer paso es hacer aparecer nuestra hipótesis inductiva (HI).

$$\begin{aligned} 2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 &= 2 \cdot 7^n \cdot 7 + 3 \cdot 5^n 5 - 5 \\ &= 2 \cdot 7^n \cdot (1+6) + 3 \cdot 5^n (1+4) - 5 \\ &= (2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5) + (7^n \cdot 6 + 3 \cdot 5^n 4) \end{aligned}$$

Una condición suficiente[2] para asegurar que la última expresión es divisible por 24 que los dos sumandos encerrados entre paréntesis sean divisbles por 24. El primer sumando $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ ya sabemos que es divisible por 24 por hipótesis inductiva (ojo aquí, la hipótesis inductiva no se demuestra, se asume que existe y se usa como una hiótesis más del problema). Para demostrar que el segundo sumando $2 \cdot 7^n \cdot 6 + 3 \cdot 5^n 4$ es disivible por 24 ,$\forall n \geq 1$, hay que demostrarlo por inducción.

En efecto, hagamos esta inducción:

- Caso base $n = 1$.
  Si $n = 1$, entonces se tiene que $2 \cdot 7^1 \cdot 6 + 3 \cdot 5^1 4 = 144$ y $\frac{144}{24} = 6$. Por por tanto para $n = 1$ la expresión es divisible por 24.
- Paso inductivo
  Por HI asumimos que $\exists n \geq$ tal que $2 \cdot 7^n \cdot 6 + 3 \cdot 5^n 4$ es divisible por 24. Con esto hay que probar que también se cumple para $n+1$. es decir, que $2 \cdot 7^{n+1} \cdot 6 + 3 \cdot 5^{n+1} 4$ es disible por 24. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} 2 \cdot 7^{n+1} \cdot 6 + 3 \cdot 5^{n+1} 4 &= 2 \cdot 7^n \cdot 6 \cdot (1+6) + 3 \cdot 5^n 4 \cdot (1+4) \\ &= (2 \cdot 7^n \cdot 6 + 3 \cdot 5^n 4) + (2 \cdot 7^n \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 5^n 4 \cdot 4) \end{aligned}$$

De nuevo, se tiene que el primer sumando $2 \cdot 7^n \cdot 6 + 3 \cdot 5^n 4$ es divisible por 24 por HI, y para el segundo sumando se tiene que es disivible por 24 ya que

$$2 \cdot 7^n \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 5^n 4 \cdot 4 = 24(3 \cdot 7^n + 2 \cdot 5^n)$$

[2]OJO: condición SUFICIENTE, es decir, puede pasar que ningún sumando sea divisible por 24, pero así no podemos asegurar que la suma de ellos los sea. En cambio, si ambos son divisibles por 24, entonces puedo asegurar que la suma también lo es.

Así, como ambos sumando son divisibles por 24 se tiene que $2 \cdot 7^{n+1} \cdot 6 + 3 \cdot 5^{n+1} 4$ es divisible por 24. $\square$

Ahora, volviendo al problema original, demostramos que $2 \cdot 7^n \cdot 6 + 3 \cdot 5^n 4$ es divisible por 24 y ya teníamos que el sumando $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24 por HI del problema original obteniendo así que

$$2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 = 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 + 2 \cdot 7^n \cdot 6 + 3 \cdot 5^n 4$$

es divisible por 24 concluyendo el paso inductivo. $\square$

ii) Se define por recurrencia la colección de reales $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la siguiente forma:

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{12}{1 + a_n}, \forall n > 1.$$

Demuestre por inducción que:

a) $\forall n \geq 1, a_{2n-1} < a_{2n+1}$

b) $\forall n \geq 1, a_{2n} > 3$

iii) Se define $a_n = 2^{2^n} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$. A continuación probaremos que $mcd(a_n, a_m) = 1, \forall n \neq m$. Para ello sigamos el siguiente camino.

a) Demuestre mediante inducción que

$$a_n = a_0 \cdot ... \cdot a_{n-1} + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

En donde $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

b) Pruebe que si $\exists p > 1$ tal que p divide a a_n y a_m con $n \neq m$, entonces p es par e impar a la vez. Con esto concluya el resultado.

P5.- (Propuesto) Sea p, q y s proposiciones tales que $(\overline{p} \vee q) \implies s$ es falsa. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

i) $\overline{q} \implies \overline{q}$

ii) $s \implies (p \iff \overline{p \vee s})$