MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 22 de marzo de 2019.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 1: Lógica, cuantificadores e inducción

P1.- Demuestre que las siguientes proposiciones son tautología usando demostración exploratoria.

i) $[(\overline{p} \vee q) \vee (\overline{s} \wedge \overline{p})] \iff (p \implies q)$

ii) $[(p \implies \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge s] \implies \overline{p}$

P2.- Demuestre por contradicción que la siguiente proposición es tautología.

$$\left[(p \implies q) \wedge (\overline{s} \implies \overline{t})\right] \implies \left[\overline{p} \vee \overline{t} \vee (q \wedge s)\right]$$

P3.- a) Sea F un conjunto de personas que se encuentran esperando en la fila de un banco para ser atendidas. Para $x, y \in F$ se define la función proposicional $\xi(x, y)$: "La persona x esta delante de la persona y en la fila".

Sea $p \in F$ una persona de la fila. Determine la posición que ocupa la persona en la fila para las siguientes proposiciones cuantificadas.

i) $(\forall x \in F)(\xi(p, x) \vee x = p)$

ii) $(\forall x \in F)(\xi(x, p) \vee x = p)$

iii) $(\exists! x \in F)([\xi(p, x) \vee \xi(x, p)] \wedge \overline{[(\xi(x, p) \wedge \xi(p, x)]})$

b) Sea p una proposición lógica y $q(x)$ una función proposicional. Si llamamos τ a la proposición $(\forall x)(p \implies q(x))$, determine el valor de verdad de p sabiendo que τ es falsa.

c) Demuestre que la proposición $(\exists y)(p(y) \implies (\forall x), p(x))$ es una tautología. Además, escriba la negación de la proposición.

P4.- i) Pruebe por inducción que $\forall n \geq 1$, $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24.

ii) Se define por recurrencia la colección de reales $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la siguiente forma:

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{12}{1 + a_n}, \forall n > 1.$$

Demuestre por inducción que:

a) $\forall n \geq 1, a_{2n-1} < a_{2n+1}$

b) $\forall n \geq 1, a_{2n} > 3$

iii) Se define $a_n = 2^{2^n} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$. A continuación probaremos que $mcd(a_n, a_m) = 1, \forall n \neq m$. Para ello sigamos el siguiente camino.

a) Demuestre mediante inducción que

$$a_n = a_0 \cdot ... \cdot a_{n-1} + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

En donde $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

b) Pruebe que si $\exists p > 1$ tal que p divide a a_n y a_m con $n \neq m$, entonces p es par e impar a la vez. Con esto concluya el resultado.

P5.- **(Propuesto)** Sea p, q y s proposiciones tales que $(\overline{p} \vee q) \implies s$ es falsa. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

i) $\overline{q} \implies \overline{q}$

ii) $s \implies (p \iff \overline{p \vee s})$