MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 17 de marzo de 2019.

Pauta auxiliar 0: Lógica

RESUMEN SEMANA 1 (PARCIAL)

Proposición 1 (Tautologías básicas)**.** *Las siguientes son tautologías:*

- *Dominancia:* $p \vee V \iff V, p \wedge F \iff F$
- *Identidad:* $p \wedge V \iff p, p \vee F \iff p$
- *Idempotencia:* $p \wedge p \iff p, p \vee p \iff p$
- *Doble negación:* $\overline{\overline{p}} \iff p$
- *Tercio excluso:* $p \vee \overline{p} \iff V$
- *Consistencia* $p \wedge \overline{p} \iff F$
- *Caracterización implicancia:* $p \implies q \iff \overline{p} \vee q$
- *Relajación:* $p \wedge q \implies q, p \implies p \vee q$
- *Absorción:* $p \vee (p \wedge q) \iff p, p \wedge (p \vee q) \iff p$

Proposición 2 (Álgebra booleana)**.** *Las siguientes son tautologías*

- *Leyes de Morgan:*
  - $\overline{p \wedge q} \iff \overline{p} \vee \overline{q}$
  - $\overline{p \vee q} \iff \overline{p} \wedge \overline{q}$
- *Conmutatividad de* $\wedge$ *y* $\vee$*:*
  - $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- *Asociatividad de* $\vee$ *y* $\wedge$*:*
  - $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$
  - $p \wedge (q \wedge r) \iff (p \wedge q) \wedge r$
- *Distributividad:*
  - *De* $\vee$ *respecto* $\wedge$*:* $p \vee (q \wedge s) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee s)$
  - *De* $\wedge$ *respecto* $\vee$*:* $p \wedge (q \vee s) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$

P2.- i) Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, t y s si se sabe que la siguiente proposición es verdadera:

$$[s \implies (t \vee \overline{t})] \implies \left[\overline{(p \implies q)} \wedge s \wedge \overline{t}\right]. \tag{1}$$

¿Es esta proposición una tautología?

Resolución:

Por enunciado tenemos que (1) es V. Con esto tenemos tres posibles opciones para las proposiciones $[s \implies (t \vee \overline{t})]$ y $\left[\overline{(p \implies q)} \wedge s \wedge \overline{t}\right]$ (las cuales denotaremos (1) y (2), respectivamente), que son los valores de verdad que hacen verdadero al implica.

(1)	(2)
V	V
F	F
F	V

Cuadro 1: Figura 1

Para determinar cual es el valor de (1) y (2), notamos que en (1) tenemos $t \wedge \overline{t}$ la cual es una tautología, por lo tanto en (1) se tiene que $s \implies V$ (V=verdad) lo cual es siempre verdadero (si al lado derecho de un implica hay un V, el implica es siempre verdad independiente del valor de verdad al lado izquierdo del implica).

Luego, como (1) es verdad, viendo la Figura 1 tenemos que necesariamente (2) es verdad.

Como (2) es verdad, entonces se tiene que

- s es verdad.
- $\overline{t}$ es verdad, por lo que t es falso.
- $\overline{p \implies q}$ es verdad, por lo que $p \implies q$ es falso, y así p es verdad y q es falso (ya que es la única combinación de valores de verdad que hace falso al implica).

P3.- Demuestre que la siguiente proposición es una tautología mediante demostración simbólica

$$[(p \implies \overline{q}) \wedge (s \implies q)] \implies (p \implies \overline{s})$$

Resolución:

$$
\begin{aligned}
[(p \implies \overline{q}) \wedge (s \implies q)] \implies (p \implies \overline{s}) &\iff [(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (\overline{s} \vee q)] \implies (\overline{p} \vee \overline{s}) && \text{Carac. del implica}\\
&\iff \overline{(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (\overline{s} \vee q)} \vee (\overline{p} \vee \overline{s}) && \text{Carac. del implica}\\
&\iff \overline{(\overline{p} \vee \overline{q})} \vee \overline{(\overline{s} \vee q)} \vee \overline{p} \vee \overline{s} && \text{Ley de Morgan}\\
&\iff (p \wedge q) \vee (s \wedge \overline{q}) \vee \overline{p} \vee \overline{s} && \text{Ley de Morgan}\\
&\iff [(p \wedge q) \vee \overline{p}] \vee [(s \wedge \overline{q}) \vee \overline{s}] && \text{Asoc. y conmu. de } \vee\\
&\iff [q \vee \overline{p}] \vee [\overline{q} \vee \overline{s}] && (p \wedge q) \vee \overline{p} \iff q \vee \overline{p}\\
&\iff q \vee \overline{q} \vee \overline{p} \vee \overline{s} && \text{Conmutativdad de } \vee\\
&\iff (q \vee \overline{q}) \vee \overline{p} \vee \overline{s} && \text{Asociatividad de } \vee\\
&\iff V \vee \overline{p} \vee \overline{s} && q \vee \overline{q} \iff V\\
&\iff V
\end{aligned}
$$

En donde se usó: □

- Caracterización del implica: $p \implies q \iff \overline{p} \vee q$
- Leyes de Morgan: $\overline{p \wedge q} \iff \overline{p} \vee \overline{q}$ y $\overline{p \vee q} \iff \overline{p} \wedge \overline{q}$
- La propiedad $(p \wedge q) \vee \overline{p} \iff q \vee \overline{p}$, la cual demostramos a continuación[1]:

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \vee \overline{p} &\iff (p \vee \overline{p}) \wedge (q \vee \overline{p}) && \text{Distributividad de } \vee \text{ sobre } \wedge\\
&\iff V \wedge (q \vee \overline{p}) && p \vee \overline{p} \iff V\\
&\iff q \vee \overline{p} && V \wedge p \iff p
\end{aligned}
$$

□

P4.- Sean p, q, t y s proposiciones. Usando demostración exploratoria demuestre que la siguiente proposición es una tautología

$$\big[(p \implies q) \wedge (\overline{s} \implies \overline{t})\big] \implies \big[\overline{p} \vee \overline{t} \vee (q \wedge s)\big] \tag{2}$$

Resolución:

Para demostrar por vía exploratoria que la proposición (2) es verdad, hay que probar que independiente del valor de verdad de las proposiciones que la componen, la proposición principal (2) es siempre verdad.

Denotemos a $(p \implies q) \wedge (\overline{s} \implies \overline{t})$ y a $\overline{p} \vee \overline{t} \vee (q \wedge s)$ por (a) y (b), respectivamente.

Como queremos demostrar que un implica es verdad ((a) $\implies$ (b)), notamos lo siguiente:

1) Si (a) es Falso, se tiene que directo que la proposición (2) es verdadera (ya que $F \implies q$ es verdad para cualquier valor de verdad de q).
2) Si (a) es verdad, no podemos asegurar directo que la proposición (2) es verdadera, ya que como (a) es verdad, si (b) fuera falso tendríamos que la proposición (2) es falsa.
   Por esto, demostraremos que si (a) es verdad, entonces (b) también lo es.
   Entonces, como (a) es verdad, se tiene que $p \implies q$ y $\overline{s} \implies \overline{t}$ son ambas verdaderas.
   Ahora, **elegimos** una proposición arbitraria, en este caso la proposición **p** y nos ponemos en el caso que p sea verdad y que sea falsa, y llegaremos en ambos casos a que (b) necesariamente es verdad.
   2.1) **p es falsa.** Si p es falsa, entonces $\overline{p}$ es verdad y por lo tanto (2) es verdad, ya que

$$
\begin{aligned}
\overline{p} \vee \overline{t} \vee (q \wedge s) &\iff V \vee \overline{t} \vee (q \wedge s)\\
&\iff V
\end{aligned}
$$

   2.2) **p es verdad**. Si p es verdad, como también se tiene que $p \implies q$ es verdad, entonces q es verdad.
   Con esto,

[1] En la versión que tengo del apunte (2018) no aparece como propiedad. Si en la versión 201 aparece como propiedad no hay que demostrarlo si lo usan en el control. Si no esta hay que demostrarlo.

$$\begin{aligned}\overline{p} \vee \overline{t} \vee (q \wedge s) &\iff V \vee \overline{t} \vee (F \wedge s)\\ &\iff \overline{t} \vee s\end{aligned}$$

Luego, por caracterización del implica ($\overline{s} \implies \overline{t}$) $\iff$ ($s \vee \overline{t}$), como $\overline{s} \implies \overline{t}$ es verdad, entonces $\overline{t} \vee s$ también lo es, y con eso obtenemos que (b) es verdad, ya que en este caso obtuvimos que $\overline{p} \vee \overline{t} \vee (q \wedge s) \iff \overline{t} \vee s$, por lo que si $\overline{t} \vee s$, (b) también lo es.

Con esto, como obtuvimos que independiente del valor de verdad de (a), la proposición (2) es verdad siempre, con lo cual se demuestra que es una tautología. □

P5.- Se define el conectivo lógico $*$ a través de la siguiente tabla de verdad.

p	q	p*q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Escriba la siguientes proposiciones, utilizando sólo este nuevo conector lógico.

i) Negación ($\hat{p}$)

ii) $p \vee q$

iii) $p \wedge q$

iv) $p \implies q$ **(propuesto)**

Resolución:

Primero, dos proposiciones lógicas son equivalentes si es que tienen la misma tabla de verdad.

con esto notamos que la tabla de verdad de $p * q$ es igual a la de $\overline{p} \wedge \overline{q}$[2], y así estas expresiones son equivalentes, $a * b \iff \overline{a} \wedge \overline{b}$.

Luego, para escribir las proposiciones que nos dan en función del conector $*$, hay que encontrar expresiones equivalentes a las que nos dan, que estén solo en función de $*$.

i)

$$\begin{aligned}\overline{p} &\iff \overline{p} \wedge \overline{p} & p \wedge p \iff p\\ &\iff p * p & p * q \iff \overline{p} \wedge \overline{q}, \text{ tomando q=p}\end{aligned}$$

□

ii)

$$\begin{aligned}p \vee q &\iff \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}} & \text{Ley de morgan}\\ &\iff (\overline{p} \wedge \overline{q}) * (\overline{p} \wedge \overline{q}) & \text{Expresión de la negación encontrada en i)}\\ &\iff (p * q) * (p * q) & \overline{p} \wedge \overline{q} \iff p * q\end{aligned}$$

□ **Obs:** A diferencia de los operadores $\wedge$,$\vee$ y $\iff$, no sabemos si este nuevo operador $*$ es conmutativo o asociativo, por lo tanto es importante respetar el orden de las expresiones.

iii)

$$\begin{aligned}p \wedge q &\iff \overline{\overline{p}} \wedge \overline{\overline{q}} & \text{Doble negación}\\ &\iff \overline{p} * \overline{q} & a * b \iff \overline{a} \wedge \overline{b} \text{ para a=}\overline{p} \text{ y b=}\overline{q}\\ &\iff (p * p) * (q * q) & \text{Expresión de la negación encontrada en i)}\end{aligned}$$

□

[2] P1 i)