Pauta auxiliar 8

P1 a) Calcule:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (i-j)^2$$

Nota que la sumatoria de adentro solo depende de j, $\therefore$ podemos sacar las variables dependientes de i:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (i-j)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} i^2 - 2ij + j^2$$

Separando las sumatorias y quitando i de estas

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[i^2 \sum_{j=1}^{m} 1 - 2i \sum_{j=1}^{m} j + \sum_{j=1}^{m} j^2 \right]$$

Así calculamos sumatorias conocidas:

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[i^2 \cdot (m-1+1) - 2i \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2} + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \right]$$

Nota que m es una constante, $\therefore$ la podemos quitar:

Separando las sumas y quitando constantes

$$= m \sum_{i=1}^{n} i^2 - m(m+1) \sum_{i=1}^{n} i + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{m \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - \frac{m(m+1) \cdot n(n+1)}{2}$$

$$+ \frac{m(m+1)(2m+1) \cdot n}{6}$$

Scanned by CamScanner

b) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

P.D.Q. $$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, a_i$$

En efecto: Partamos del lado izquierdo como la sumatoria de adentro tiene dependencia en k en su límite superior, definimos $$b_{i,k} = \begin{cases} a_i & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i \in \{k+1, \dots, n\} \end{cases}$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_{i,k}$$ $\longrightarrow$ pasamos la dependencia de k a $b_{i,k}$

así:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{i,k}$$ Ahora podemos dar vuelta las sumas!

Damos vuelta las sumas $$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}$$

recordemos que $b_{i,k} = 0$ si $i \geq k+1 \iff i-1 \geq k$

luego $$\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} = \sum_{k=i}^{n} b_{i,k}$$ $\rightarrow$ pues los términos tal que $k < i$ son 0

Así:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} b_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_i$$

pues $i \leq k$ en la suma

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{k=i}^{n} 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (n - i + 1)$$

a_i no depende de k

que es justo a lo que queríamos llegar.

Por ende:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1)\, a_i$$

c) Calcular:

$$\sum_{n=1}^{2m} \sum_{k=1}^{n} (-1)^n k$$

Observaciones:

1) La sumatoria de adentro depende de n ∴ no las podemos intercambiar (el subíndice superior depende de n)

2) Tenemos que para los términos n pares y n impares la suma de adentro cambia de signo

Hay varias formas de hacer estas sumas, una de ellas es:

<u>Método para quitar dependencia entre sumas</u>:

Definimos $b_{n,k} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si} \quad k \leq n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}$

Así:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^n k = \sum_{k=1}^{2m} b_{n,k} \cdot k$$

Podemos agregar los términos faltantes (entre n+1 y 2m) pues $b_{n,k} = 0$ en ellos.

Así, quitamos la dependencia en el superíndice.

Luego:

$$\sum_{n=1}^{2m} \sum_{k=1}^{n} (-1)^n k = \sum_{n=1}^{2m} \sum_{k=1}^{2m} b_{n,k} \cdot k = \sum_{k=1}^{2m} \sum_{n=1}^{2m} b_{n,k}\, k$$

Cambiamos de orden la sumatoria ✓

$$= \sum_{k=1}^{2m} k \cdot \sum_{n=1}^{2m} b_{n,k} \qquad (\star)$$

Podemos extraer k pues no depende de n.

Ahora la idea es volver a $(-1)^n$. Recordemos que:

$$b_{n,k} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{2m} b_{n,k} = \sum_{n=1}^{k-1} \underbrace{b_{n,k}} + \sum_{n=k}^{2m} \underbrace{b_{n,k}}$$

Aquí entre 1 y $k-1$ $b_{n,k} = 0$

Aquí entre k y 2m, $b_{n,k} = (-1)^n$

$$= \sum_{n=k}^{2m} \underbrace{(-1)^n}$$

esto será −1 y 1 alternamente... así, se van a ir anulando los términos!

Pero... ¿Hay más 1's o −1's? eso dependerá de si k es par o impar

Caso 1: k impar. entre k y 2m habrá $2m+1-k$ números y como k es impar, $2m+1-k$ es par, ∴ habrá igual cantidad de unos y menos unos (pues estos son sucesivos).

Así $\sum_{n=k}^{2m} (-1)^n = 0$

Caso 2: k par: entre k y $2m$ habra $2m+1-k$ terminos, y como $2m+1-k$ es una cantidad impar de terminos, no habrá la misma cantidad de pares e impares. En cambio:

$$\sum_{n=k}^{2m} (-1)^n = (-1)^{2m} + \underbrace{\sum_{n=k}^{2m-1} (-1)^n}$$

En esta sumatoria hay igual cantidad de unos y menos unos pues $2m-k$ es par.

$$= (-1)^{2m} + 0$$

Como hay igual cantidad de 1's y -1's, $\sum_{n=k}^{2m-1} (-1)^n = 0$

$$= 1$$

Así, volviendo a (☆) y separando en casos:

$$\sum_{k=1}^{2m} k \sum_{n=1}^{2m} b_{n,k} = \sum_{k=1}^{2m} k \sum_{n=k}^{2m} (-1)^n$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ par}}}^{2m} k \cdot \underbrace{\sum_{n=k}^{2m} (-1)^n}_{=1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{2m} k \underbrace{\sum_{n=k}^{2m} (-1)^n}_{=0}$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ par}}}^{2m} k$$

YAY! algo "simple"

Como k es par y va de 1 a 2m, podemos hacer el cambio de variable $k = 2j$ con j de 1 a m:

$$= \sum_{j=1}^{m} 2j = 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} j = m(m+1)$$

Concluyendo.

Pauta auxiliar 8

P2] · E finito
· $A, B \subseteq E$

a) P.D.Q. $|A^c| + |A| = |E|$

En efecto: $|E| = \underbrace{|A \cup A^c|}_{\text{Unión disjunta pues } A \cap A^c = \phi} = |A| + |A^c|$ //

Otra forma:

$|A^c| = \underbrace{|E \setminus A|}_{\text{Def. de } A^c} = |E| - |A|$ → Pues si $B \subseteq C$ entonces $|C \setminus B| = |C| - |B|$

$\therefore \quad |A| + |A^c| = |E|$

b) Si $|A \cap B| = |B|$

P.D.Q. $|A^c \cap B^c| = |A^c|$

Metodo 1: Como $|A \cap B| = |B|$ y $A \cap B \subseteq B$, por propiedad del apunte tenemos que $A \cap B = B$ y esto equivale a $B \subseteq A$.

Luego, tendremos que $A^c \subseteq B^c$ (pues $A \subseteq B$).
Así $A^c \cap B^c = A^c \Rightarrow |A^c \cap B^c| = |A^c|$ //

Metodo 2: Notar que:

$$|A^c \cap B^c| = |(A \cup B)^c| \quad | \text{ Por De Morgan}$$
$$= |E| - |A \cup B| \quad | \text{ Parte a)}$$
$$= |A| + |A^c| - |A \cup B| \quad | \text{ Parte a)}$$

Pero además $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$= |A| + |B| - |B|$ | Hipótesis de la pregunta

$= |A|$

$\therefore$ Tenemos que:

$$|A^c \cap B^c| = |A| + |A^c| - |A \cup B|$$
$$= |A| + |A^c| - |A|$$
$$= \underline{\underline{|A^c|}} \quad \text{Concluyendo lo pedido}$$

c) P.D.Q. $|(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

En efecto: Primero hay que notar que:

$$(A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) = A \cap B^c \cap B \cap A^c$$
$$= A \cap \emptyset \cap A^c$$
$$= \emptyset$$

$\therefore$ $(A \cap B^c)$ y $(B \cap A^c)$ son disjuntos. Luego:

$$|(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)| = |A \cap B^c| + |B \cap A^c|$$

Además:

- $|A \cap B^c| = |A \setminus B| = |A \setminus (A \cap B)|$ | Pues $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

$$A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c$$
$$= A \cap (A^c \cup B^c)$$
$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$$
$$= \underbrace{\emptyset}_{} \cup \underbrace{(A \setminus B)}_{}$$
$$= A \setminus B$$

Luego como $A \cap B \subseteq A$ se tiene por propiedad conocida que:

$$|A \setminus (A \cap B)| = |A| - |A \cap B|$$

Similarmente:

- $|B \cap A^c| = |B \setminus A| = |B \setminus (A \cap B)|$

$$= |B| - |A \cap B) \quad | \text{ Usando que } A \cap B \subseteq B$$

$\therefore$

$$|(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)| = |A \cap B^c| + |B \cap A^c|$$

$$= |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B|$$

$$= |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Concluyendo lo pedido

Pauta auxiliar 8

P3

a) Sean A, B conjuntos finitos

P.D.Q. $|A \times B| = |B \times A|$

En efecto: Vamos a ver que existe una función f biyectiva entre $A \times B$ y $B \times A$.

Definimos:

$$f : A \times B \longrightarrow B \times A$$
$$(a, b) \longmapsto f((a,b)) = (b, a)$$

✓ claramente está bien definido

(pues $(a,b) \in A \times B \iff a \in A \wedge b \in B$
$\iff b \in B \wedge a \in A$
$\iff (b,a) \in B \times A$)

✓ Veamos que es biyectiva:

Sea $g : B \times A \longrightarrow A \times B$
$(b,a) \longmapsto g((b,a)) = (a, b)$

evidentemente

- $g \circ f(a,b) = (a,b) \quad \forall (a,b) \in A \times B \Rightarrow g \circ f = id_{A \times B}$
- $f \circ g(b,a) = (b,a) \quad \forall (b,a) \in B \times A \Rightarrow f \circ g = id_{B \times A}$

$\therefore$ Por teorema de la inversa f es biyectiva.

$\therefore \exists f : A \times B \rightarrow B \times A$ biyectiva

$\iff |A \times B| = |B \times A|$

b) Sea I finito.

P.D.Q. $|P(I)| = 2^{|I|}$

En efecto: La idea es usar funciones biyectivas.

Para eso, notar que $2^{|I|} = |\{0,1\}|^{|I|}$

$\therefore$ Veamos que $|P(I)| = |\{0,1\}|^{|I|}$

Para eso, creemos una biyección entre $P(I)$ y $\{0,1\}^{|I|}$...

¿Como hacerlo?

Analicemos un poco los conjuntos:

1) $P(I)$ es un conjunto de subconjuntos de I en donde $A \in P(I)$ si $A \subseteq I$, o sea A tiene una cantidad de elementos de I (que son $|A|$) mientras que los otros $|I|-|A|$ elementos de I no estan en A.

2) $\{0,1\}^{|I|}$ son pares ordenados! (los elementos de $\{0,1\}^{|I|}$)

$$\{0,1\}^{|I|} = \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{|I| \text{ veces}}$$

donde si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{|I|}) \in \{0,1\}^{|I|}$ hay una cierta cantidad de x_i que son 0, y los demás son 1.

Vemos que en ambos hay en comun que los elementos de I se separan en dos grupos, en el primero entre A y A^c, y en el segundo entre 0 y 1. Esto inspira la siguiente idea:

Definamos la función $\varphi : P(I) \longrightarrow \{0,1\}^{|I|}$ por:

Como I tiene $|I|$ elementos, denotamos $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{|I|}\}$

Así: $\varphi(\underset{A \in P(I)}{A}) = (x_1, x_2, \dots, x_{|I|})$

(*) donde $\forall j \in \{1, \dots, |I|\}$, $x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i_j \in A \\ 0 & \text{si } i_j \notin A \end{cases}$

Veamos que φ sea inyectiva y epiyectiva:

1) <u>Inyectiva</u>:

Sean $A, B \in P(I)$ tales que $\varphi(A) = \varphi(B)$

$\Leftrightarrow (a_1, \dots, a_{|I|}) = (b_1, \dots, b_{|I|})$

↳ Denotamos con a y b en vez de x por comodidad, pero la definición (*) es la misma

$\Leftrightarrow \forall j \in [1..|I|], \; a_j = b_j \qquad (!!)$

Así, veamos que $A = B$:

$\subseteq$] Sea $x \in A$, como $A \subseteq I \Rightarrow x \in I$.

Así, existe $\underset{\in [1..|I|]}{\bar{j}}$ tal que $x = i_{\bar{j}}$

luego $a_{\bar{j}} = 1$ pues $x = i_{\bar{j}} \in A$

y por $(!!)$ esto implica que $b_{\bar{j}} = 1$ luego $i_{\bar{j}} \in B$

Así $x \in B$.

Luego $A \subseteq B$. Por simetría del problema, también se tiene $B \subseteq A$, luego $A = B$.

Así hemos visto que $\varphi(A) = \varphi(B) \Rightarrow A = B$.

Epiyectividad: Sea $(x_1, \dots, x_{|I|}) \in \{0,1\}^{|I|}$

Hay que ver que $\exists\, A \in P(I)$ tal que $\varphi(A) = (x_1, \dots, x_{|I|})$

en efecto: Tomemos:

$$A = \{ i_j \in I \mid x_j = 1 \}$$

Así, es evidente que $\underbrace{\varphi(A) = (x_1, x_2, \dots, x_{|I|})}$

Pues A esta construido de forma que a los x_j que sean 1, el i_j asociado este dentro de A y los x_i que sean 0 no tengan su i_j en A.

$\therefore$ φ es epiyectiva.

Así, concluimos que φ es biyectiva, y por ende:

$$|P(I)| = |\{0,1\}^{|I|}| = 2^{|I|}$$