MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 14: Polinomios

25 de Junio de 2019

P1. [Igualdad por coordenada]

Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2+f) + (e+f)x + (a-d)x^4 + (2a+c)x^5 + (a+b)x^7 \\ q(x) &= 3 + (f+2)x + (a+b+c+d)x^3 + (b+c+1)x^4 + bx^5 \end{aligned}$$

Determine los valores de $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que $p = q$. Escriba el polinomio resultante.

Solución 1. *Recordando que dos polinomios son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales, vemos que:*

$$\begin{aligned} 2+f &= 3 \\ e+f &= f+2 \\ 0 &= a+b+c+d \\ a-d &= b+c+1 \\ 2a+c &= b \\ a+b &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos 6 incógnitas y 6 ecuaciones, resolviendo el sistema obtenemos:

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = \frac{3}{2} \quad d = -\frac{3}{2} \quad e = 2 \quad f = 1$$

Por tanto el polinomio resultante es:

$$p(x) = q(x) = 3 + 3x - x^4 - \frac{1}{2}x^5$$

P2. [Propiedad Importante]

Sea p un polinomio con coeficientes reales tal que $p \not\equiv 0$ tal que $i, 1, 2, 3$ son raíces de p. De el grado mínimo del polinomio y suponiendo que p es del grado mínimo y mónico encuentrelo.

Solución 2. *Notemos que como* i *es raíz entonces* $\bar{i} = -i$ *también lo es. Por ende el polinomio tiene por lo menos* 5 *raices* $(i, -i, 1, 2, 3)$ *y por tanto el grado de* p *debe ser mayor a* 5. *Como el polinomio debe tener lo anterior como raíces, tenemos que:*

$$p(x) = (x - i)(x + i)(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6$$

Satisface lo pedido.

P3. [Factorización en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$]

a) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

b) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raiz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raices y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

c) Se sabe que el polinomio

$$p(z) = 2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz - 3i + 1$$

admite una raiz real a (es decir, $a \in \mathbb{R}$). Determine todas las raices de $p(z)$

Solución 3.

a) *Por el teorema de la raíz racional sabemos que si* $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *es una raíz entonces* $a| - 15$ *y* $b|1$, *luego las posibles raíces racionales son:*

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

Veamos si encontramos alguna:

$$\begin{aligned} p(1) &= (1)^4 + 3(1)^3 - 12(1)^2 - 13(1) - 15 = -36 \\ p(-1) &= (-1)^4 + 3(-1)^3 - 12(-1)^2 - 13(-1) - 15 = -16 \\ p(3) &= (3)^4 + 3(3)^3 - 12(3)^2 - 13(3) - 15 = 0 \end{aligned}$$

Es decir 3 *es raíz, luego* $(x - 3)|p(x)$. *Dividiendo polinomios:*

$$\begin{array}{l} \big(\;x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15\big) : \big(x - 3\big) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5 \\ \underline{-x^4 + 3x^3} \\ \quad 6x^3 - 12x^2 \\ \quad \underline{-6x^3 + 18x^2} \\ \qquad 6x^2 - 13x \\ \qquad \underline{-6x^2 + 18x} \\ \qquad\quad 5x - 15 \\ \qquad\quad \underline{-5x + 15} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Nuevamente por el teorema de la raíz racional las raíces racionales del polinomio resultante $x^3 + 6x^2 + 6x + 5$, *pueden ser:*

$$\{\pm 1, \pm 5\}$$

Además sabemos que ± 1 *no pueden ser raíces pues ya las probamos y no eran raices de* p, *probemos las que faltan:*

$$\begin{aligned} q(5) &= (5)^3 + 6(5)^2 + 6(5) + 5 = 310 \\ q(-5) &= (-5)^3 + 6(-5)^2 + 6(-5) + 5 = 0 \end{aligned}$$

Es decir -5 *es raíz, dividiendo polinomios:*

$$\begin{array}{l} \big(\;x^3 + 6x^2 + 6x + 5\big) : \big(x + 5\big) = x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^3 - 5x^2} \\ \quad x^2 + 6x \\ \quad \underline{-x^2 - 5x} \\ \qquad x + 5 \\ \qquad \underline{-x - 5} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Para factorizar el polinomio resultante x^2+x+1, *ocuparemos la formula cuadrática, de donde obtenemos que:*

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Estamos listos para entregar la factorización de nuestro polinomio original. En $\mathbb{R}$*:*

$$p(x) = (x-3)(x+5)(x^2+x+1)$$

y en $\mathbb{C}$*:*

$$p(x) = (x-3)(x+5)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

b) *Notemos que hay 7 raices en total (pueden repetirse, es decir, pueden tener multiplicidad). Notar además que si* i *es raíz de multiplicidad 2, entonces* $(x-i)(x-i)$ *divide a* p *y como* $p \in \mathbb{R}[x]$ *se tiene que el conjugado de estas raices tambien son raices. Entonces como* i *es raiz doble (es decir, de multiplicidad 2) se tendrá que* $\bar{i} = -i$ *es raiz doble tambien. Por lo que tenemos 4 raices, faltan 3, para esto notemos que el polinomio* $(x-i)(x-i)(x+i)(x+i) = (x^2+1)(x^2+1) = (x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1$ *divide a* $p(x)$*. Entonces*

$$\begin{array}{rl}
\big(\ \ x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1\big) & : \big(x^4+2x^2+1\big) = x^3 - 1 \\
\underline{-x^7 - 2x^5 \qquad\quad - x^3} \qquad\qquad\quad & \\
\underline{-x^4 \qquad -2x^2 - 1} & \\
x^4 \qquad +2x^2 + 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad x^7+2x^5-x^4+x^3-2x^2-1 = (x^4+2x^2+1)\cdot(x^3-1)$$

Por lo que las raices que faltan son las raices de (x^3-1)*. De donde planteamos la igualdad*

$$x^3 - 1 = 0 \iff x^3 = 1$$

Dado lo anterior, x *debe ser una raiz cubica de la unidad, es decir,* $e^{\frac{2k\pi}{3}}$ *con* $k \in \{0,1,2\}$*.*
Finalmente
$\Rightarrow \qquad x^7+2x^5-x^4+x^3-2x^2-1 = (x^4+2x^2+1)\cdot(x-1)(x-e^{\frac{2\pi}{3}})(x-e^{\frac{4\pi}{3}})$
Por lo que la descomposición en los complejos es

$$p(x) = (x-i)^2(x+i)^2(x-1)(x-e^{\frac{2\pi}{3}})(x-e^{\frac{4\pi}{3}})$$

y en los reales es

$$p(x) = (x^2+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$$

c) *Como* a *es raiz real, se tiene que* $p(a) = 0$*, es decir,*

$$p(a) = 2a^3 - (5+6i)a^2 + 9ia - 3i + 1 = 0$$

Notar que aca no podemos usar el teorema de la raiz racional. Sin embargo, como $a \in \mathbb{R}$ *sabemos que* $\mathbb{R}\mathrm{e}(a) = a$ *y* $\mathbb{I}\mathrm{m}(a) = 0$*. Entonces tomando parte real en la igualdad anterior se tiene que*

$$2a^3 - 5a^2 + 1 = 0$$

Donde aqui si podemos usar el teorema de la raiz racional, obteniendo que $a = \dfrac{1}{2}$*.*
Entonces volviendo al polinomio del enunciado, si evaluamos $p(\frac{1}{2})$ *obtenemos lo siguiente*

$$p(\frac{1}{2}) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - (5+6i)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9i\left(\frac{1}{2}\right) - 3i + 1 = 0$$

Por lo que podemos hacer división sintetica o división de polinomios para seguir calculando las raices Entonces procedemos por división sintetica

2	*-5-6i*	*9i*	*-3i+1*	*1/2*
	1	*-2-3i*	*-1+3i*	
2	*-4-6i*	*-2+6i*	*0*	

Donde en la columna 2, el número 1 se calculo a partir de $2 * \frac{1}{2}$*. En la columna 3, el valor de* $-2-3i = (-4-6i)\frac{1}{2}$ *y en la columna 4, el valor* $-1+3i = (-2+6i)\frac{1}{2}$.
Finalmente $p(z) = 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz - 3i + 1 = (z - \frac{1}{2})(2z^2 + (-4-6i)z + (-2+6i))$
Por lo que falta encontrar las raices del polinomio $2z^2 + (-4-6i)z + (-2+6i)$ *en donde usando la ecuación cuadratica podemos concluir que* $z = 1+2i$ *y* $z = 1+i$
En conclusión, las raices son $\frac{1}{2}, 1+2i$ *y* $1+i$

P4. [Encontrar un polinomio]
Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $\text{gr}(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisones por $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

Solución 4. *Notemos que como $(x-1)|p(x)$:*

$$p(x) = (x-1)q(x)$$

Donde como p es mónico $q(x) = x^2 + bx + c$. Luego:

$$p(x) = (x-1)(x^2 + bx + c)$$

Utilizando el teorema del resto, tenemos que $p(2) = p(3) = p(4)$. O de manera equivalente:

$$\begin{array}{rcl} p(2) & = & p(3) \\ p(3) & = & p(4) \end{array} \implies \begin{array}{rcl} 4 + 2b + c & = & 2(9 + 3b + c) \\ 2(9 + 3b + c) & = & 3(16 + 4b + c) \end{array} \implies \begin{array}{rcl} 4b + c & = & -14 \\ 6b + c & = & -30 \end{array}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que $b = -8$ y $c = 18$. Por tanto:

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 8x + 18) = x^3 - 9x^2 + 26x - 18$$

Nos falta encontrar las raíces. Es claro que $x_1 = 1$ es una raíz, para encontrar las otras usaremos la fórmula para la cuadrática sobre $x^2 - 8x + 18$, de donde tenemos que:

$$x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 18}}{2} \implies x_2 = 4 + i\sqrt{2}, \quad x_3 = 4 - i\sqrt{2}$$

P5. [Correspondencia en Polinomios]
Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

a) Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $\mathrm{gr}(p) \geq 1$.
Hint : Puede ser útil el teorema fundamental del álgebra.

b) El objetivo de esta parte es probar que $p(x)$ es inyectivo, si y sólo si $\mathrm{gr}(p) = 1$.

(i) Demuestre que si $\mathrm{gr}(p) = 1$, entonces $p(x)$ es inyectivo.

(ii) Demuestre que si $\mathrm{gr}(p) < 1$, entonces $p(x)$ no es inyectivo.

(iii) Sea $n > 1$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Definamos $q \in \mathbb{C}[x]$ como:

$$q(x) = \lambda(x-a)^n$$

Demuestre que $q(x)$ no es inyectivo.

(iv) Concluya la dirección que falta.

Solución 5.

a)
- ($\Longrightarrow$)
Probaremos la contrarreciproca, es decir:

$$\mathrm{gr}(p) < 1 \implies p(x) \textit{ no es sobreyectiva}$$

Si $\mathrm{gr}(p) < 1$*, entonces* $p(x) = c$ *para algún* $c \in \mathbb{C}$*. Tomemos entonces* $a \neq c$*, luego* $\forall x \in \mathbb{C}$

$$p(x) = c \neq a$$

De donde vemos que p *no es sobreyectivo.*

- ($\Longleftarrow$)
Sea $b \in \mathbb{C}$*, queremos encontrar* $a \in \mathbb{C}$ *tal que* $p(a) = b$*. Definamos entonces el siguiente polinomio:*

$$f(x) = p(x) - b$$

Como $\mathrm{gr}(p) \geq 1$*, entonces* $\mathrm{gr}(f) \geq 1$*. Por el teorema fundamental del álgebra existe* x_0 *tal que* $f(x_0) = 0$*. Luego:*

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ p(x_0) - b &= 0 \\ p(x_0) &= b \end{aligned}$$

Tomando $a = x_0$ *concluimos.*

b) *(i) Si* $\mathrm{gr}(p) = 1$*, entonces* $p(x) = ax + b$ *con* $a \neq 0$*. Sean* $x, y \in \mathbb{C}$*, tales que* $p(x) = p(y)$*, luego:*

$$\begin{aligned} p(x) &= p(y) \\ ax + b &= ay + b \\ ax &= ay \\ x &= y \end{aligned}$$

Por tanto $p(x)$ *es inyectiva.*

(ii) Si $\mathrm{gr}(p) < 1$*, entonces* $p(x) = a$*. Luego* $0 \neq 1$*, pero* $p(0) = p(1)$*, es decir* $p(x)$ *no es inyectiva.*

(iii) Como $n > 1$*, sea* w_0 *y* w_1 *dos raíces* n*-ésimas de la unidad tal que* $w_0 \neq w_1$*. Definamos* $u_0 = w_0 + a$ *y* $u_1 = w_1 + a$*, es claro que* $u_0 \neq u_1$*, pero:*

$$\begin{aligned} q(u_0) &= \lambda(u_0 - a)^n = \lambda(w_0 + a - a)^n = \lambda(w_0)^n = \lambda \\ q(u_1) &= \lambda(u_1 - a)^n = \lambda(w_1 + a - a)^n = \lambda(w_1)^n = \lambda \end{aligned}$$

Es decir $q(u_0) = q(u_1)$ *y por tanto* $q(x)$ *no es inyectiva.*

(iv) *Recapitulando. En la parte* (i) *probamos que:*

$$\mathrm{gr}(p) = 1 \implies p(x) \text{ es inyectivo}$$

Nos falta probar la reciproca. Por contrarreciproca probaremos que:

$$\mathrm{gr}(p) \neq 1 \implies p(x) \text{ no es inyectivo}$$

Como el $\mathrm{gr}(p) \neq 1$*, tenemos que* $\mathrm{gr}(p) < 1$ *o* $\mathrm{gr}(p) > 1$*. Si* $\mathrm{gr}(p) < 1$*, de donde concluiríamos por la parte* (ii)*. Asumamos entonces que* $\mathrm{gr}(p) > 1$*, tenemos dos casos:*

- ***Caso 1:*** *(p tiene solamente una raíz)*
  Si p tiene solo una raíz, llamemosla $a \in \mathbb{C}$ *, entonces p es de la forma:*

  $$p(x) = \lambda(x-a)^n$$

  De donde por la parte (iii)*, tenemos que* $p(x)$ *no es inyectiva.*
- ***Caso 2:*** *(p tiene al menos dos raíces)*
  Si p tiene al menos dos raíces, llamemoslas $a, b \in \mathbb{C}$*. Entonces* $p(a) = p(b) = 0$*, de donde concluimos que* $p(x)$ *no es inyectiva.*

Como de cualquier manera $p(x)$ *no es inyectiva, concluimos.*