MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 14: Polinomios

25 de Junio de 2019

P1. [Igualdad por coordenada]

Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2+f) + (e+f)x + (a-d)x^4 + (2a+c)x^5 + (a+b)x^7 \\ q(x) &= 3 + (f+2)x + (a+b+c+d)x^3 + (b+c+1)x^4 + bx^5 \end{aligned}$$

Determine los valores de $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que $p = q$. Escriba el polinomio resultante.

P2. [Propiedad Importante]

Sea p un polinomio con coeficientes reales tal que $p \not\equiv 0$ tal que $i, 1, 2, 3$ son raíces de p. De el grado mínimo del polinomio y suponiendo que p es del grado mínimo y mónico encuentrelo.

P3. [Factorización en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$]

a) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

b) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raiz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raices y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

c) Se sabe que el polinomio

$$p(z) = 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz - 3i + 1$$

admite una raiz real a (es decir, $a \in \mathbb{R}$). Determine todas las raices de $p(z)$

P4. [Encontrar un polinomio]

Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $\text{gr}(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisones por $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

P5. [Correspondencia en Polinomios]

Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

a) Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) \geq 1$.
Hint : Puede ser útil el teorema fundamental del álgebra.

b) El objetivo de esta parte es probar que $p(x)$ es inyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) = 1$.

(i) Demuestre que si $\text{gr}(p) = 1$, entonces $p(x)$ es inyectivo.

(ii) Demuestre que si $\text{gr}(p) < 1$, entonces $p(x)$ no es inyectivo.

(iii) Sea $n > 1$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Definamos $q \in \mathbb{C}[x]$ como:

$$q(x) = \lambda(x-a)^n$$

Demuestre que $q(x)$ no es inyectivo.

(iv) Concluya la dirección que falta.

- Si $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$, entonces existe algún $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \varphi + 2k\pi$.
- Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raiz n-ésima de la unidad si $z^n = 1$.
- Las raices n-ésimas de la unidad son de la forma $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
- Sea $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raiz n-ésima de w si $w^n = 1$.
- Las raices n-ésimas de $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ son de la forma $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
- Sea $n \geq 2$. La suma de las n raíces n-ésimas de la unidad vale 0.
- Consideraremos a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ como el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un polinomio es una función $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ de la forma:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

  donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes en $\mathbb{K}$ a las que llamaremos coeficientes.
- Al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ se le denota $\mathbb{K}[x]$.
- Sean $p, q \in \mathbb{K}[x]$.

$$p = q \iff \text{Los coeficientes de } p \text{ y } q \text{ son iguales.}$$

- Sea $p \in \mathbb{K}[x]$. Definimos $\text{gr}(p)$ (el grado) como el k más grande tal que $a_k \neq 0$. Si $p \equiv 0$, diremos que $\text{gr}(p) = -\infty$.
- Diremos que $p \in \mathbb{K}[x]$ es mónico si el coeficiente asociado a $x^{\text{gr}(p)}$ es 1.
- Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ definimos:

  1. $(p+q)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$
  2. $(pq)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k$

  Estas operaciones verifican:

  1. $\text{gr}(p+q) \leq \text{máx}\{\text{gr}(p), \text{gr}(q)\}$.
  2. $\text{gr}(pq) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$.
- $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad, que no posee divisores del 0.
- En $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$, los únicos elementos con inverso para $\cdot$ son los polinomios de grado 0.
- Sean $p, d \in \mathbb{K}[x]$ con $d \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tal que:

  1. $p = qd + r$.
  2. $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$.

  A r lo llamaremos resto. Si $r \equiv 0$, diremos que d divide a p y lo denotaremos por $d|p$.
- **Teorema del Resto:** Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir p por el polinomio $(x - c)$ es $p(c)$.
- Diremos que $c \in \mathbb{K}$ es una raíz de $p \in \mathbb{K}[x]$ si $p(c) = 0$.
- Si $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son raíces distintas de p, entonces:

$$(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_k) | p(x)$$

- Sea $n \geq 1$. Si $p \in \mathbb{K}[x]$ es tal que $\text{gr}(p) = n$, entonces p posee a lo más n raíces distintas.
- Sea $n \geq 1$ y $p, q \in \mathbb{K}[x]$ tales que $\text{gr}(p) \leq n$ y $\text{gr}(q) \leq n$. Si p y q coinciden en $n+1$ puntos distintos, entonces son iguales.
- **Teorema Fundamental del Álgebra:** Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces p posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.
- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces existen $\alpha, c_1, \ldots c_m \in \mathbb{C}$ y $l_1, \cdots l_m \in \mathbb{N}$ tales que:

$$p(x) = \alpha(x - c_1)^{l_1} \ldots (x - c_m)^{l_m}$$

- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sea $z \in \mathbb{C}$ una raiz de p. Entonces $\overline{z}$ es una raiz de p.
- Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces existen valores $\alpha, c_1, \ldots, c_m, a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s \in \mathbb{R}$ tales que: $p \equiv \alpha(x - c_1) \ldots (x - c_m)(x^2 + a_1 x + b_1) \ldots (x^2 + a_s x + b_s)$
- **Teorema de la Raíz Racional:** Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Si r y s son primos relativos tal que $\frac{r}{s}$ es una raíz de p, entonces:

$$r|a_0 \quad \wedge \quad s|a_n$$

- Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Entonces toda raíz racional de p es entera y divide a a_0.
- El algoritmo de Ruffini permite dividir un polinomio p por $x - c$.