MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 13: Complejos

18 de Junio de 2019

P1. Escriba en su forma cartesiana los siguientes complejos:

a) $(1-i)^4(1+i)^4$

b) $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$

c) $1+i+\dfrac{i-1}{|i-1|^2+i}$

Solución 1. *Para el primero tenemos que:*

$$\begin{aligned}
(1-i)^4(1+i)^4 &= ((1-i)(1+i))^4 \\
&= (1^2-i^2)^4 \\
&= 2^4 \\
&= 16
\end{aligned}$$

Mientras que para el tercero:

$$\begin{aligned}
1+i+\frac{i-1}{|i-1|^2+i} &= 1+i+\frac{i-1}{(i-1)\overline{(i-1)}+i} \\
&= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)(1+i)+i} \\
&= (1+i)\frac{2+i}{2+i}+\frac{i-1}{2+i} \\
&= \frac{1+3i+i-1}{2+i} \\
&= 4i(2+i)^{-1} \\
&= 4i\frac{\overline{(2+i)}}{|2+i|^2} \\
&= 4i\frac{(2-i)}{5} \\
&= \frac{4}{5}+\frac{8}{5}i
\end{aligned}$$

P2. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+ib} + \frac{2}{a-ib} = 1 + i$$

P3. *a*) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}$$

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1 \;\wedge\; \mathbb{I}\mathrm{m}(z) > 0$. Demuestre que

$$\mathbb{I}\mathrm{m}(z + \frac{1}{z}) > 0$$

c) Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que

1) $(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) \in \mathbb{R}$
2) $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$

P4. Encuentre las raíces cuartas del complejo $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

Solución 2. *Buscamos las raíces cuartas de* $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$*. Pasandolo a forma polar tenemos:*

$$\begin{aligned} \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \\ &= \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4} \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Sabemos entonces que las soluciones son de la forma $\sqrt[n]{R}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ *con* $k \in \{0,1,2,3\}$*. En nuestro caso quedan* $\sqrt[4]{1}e^{i\frac{(2\pi/3)+2k\pi}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})}$*. Luego:*

$$z_1 = e^{i\pi/6} \qquad z_2 = e^{i(\pi/6+\pi/2)} \qquad z_3 = e^{i(\pi/6+\pi)} \qquad z_4 = e^{i(\pi/6+3\pi/2)}$$

P5. Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1

Solución 3. *Notemos que si:*

$$x^2 + x + 1 = 0 \implies x^3 + x^2 + x = 0$$

Igualando estas dos ecuaciones tenemos:

$$x^2 + x + 1 = x^3 + x^2 + x \implies x^3 = 1$$

De donde concluimos que las soluciones son raíces cúbicas de la unidad. Supongamos que son 1, luego:

$$1^2 + 1 + 1 = 0 \implies 3 = 0$$

Lo que sería una contradicción.

P6. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raiz cubica de la unidad con $w \neq 1$. Pruebe que

$$(1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6 = 62$$

P7. Calcule $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. *Hint: Utilice las raíces quintas de la unidad de manera adecuada.*

Solución 4. *Recordando que la suma de las raíces quintas da 0, tenemos:*

$$1 + e^{2i\pi/5} + e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = 0$$

Tomando parte real, concluimos que:

$$\begin{aligned} 1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(6\pi/5) + \cos(8\pi/5) &= 0 \\ 1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(2\pi/5) &= 0 \\ 1 + 2\cos(2\pi/5) + 2\cos(4\pi/5) &= 0 \end{aligned}$$

Ocupando la identidad $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1$ *tenemos que:*

$$4\cos(2\pi/5)^2 + 2\cos(2\pi/5) - 1 = 0$$

Resolviendo la cuadrática tenemos que:

$$\cos(2\pi/5) = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Recordando que $\cos(2\pi/5) \geq 0$, *tenemos que* $\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}3$.

P8. Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:

$$w_0w_1 + w_1w_2 + \ldots + w_{n-2}w_{n-1} + w_{n-1}w_0 = 0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

c) **[Propuesto]** Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Pruebe que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (z + w_j)^n = n(z^n + 1)$$

Solución 5. *Recordemos primero que para todo k:*

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Tiene sentido entonces notar que $w_0 = w_n$, $w_1 = w_{n+1}$, $w_2 = w_{n+2}$, etc.... Veamos además que:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = (w_1)^k$$

a*) Calculemos:*

$$\begin{aligned}
w_0w_1 + w_1w_2 + \ldots + w_{n-2}w_{n-1} + w_{n-1}w_0 &= w_0w_1 + w_1w_2 + \ldots + w_{n-2}w_{n-1} + w_{n-1}w_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} w_k w_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (w_1)^k (w_1)^{k+1} \\
&= w_1 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (w_1^2)^k}_{Geométrica} \\
&= w_1 \frac{(w_1^2)^n - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= w_1 \frac{(w_1^n)^2 - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= w_1 \frac{1^2 - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

b) *Similar a lo hecho en la parte a):*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k &= \sum_{j=0}^{n-1}(w_1^j)^k \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}(w_1^k)^j}_{\textit{Geométrica}} \\
&= \frac{(w_1^k)^n - 1}{w_1^k - 1} \\
&= \frac{(w_1^n)^k - 1}{w_1^k - 1} \\
&= \frac{1^k - 1}{w_1^k - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

c) *La idea de esta parte es recordar que el Teorema del Binomio funciona para elementos de $\mathbb{C}$ (de hecho el Teorema del Binomio nos da algo más potente aún, una igualdad de polinomios):*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}(z+w_j)^n &= \sum_{j=0}^{n-1}(z+w_1^j)^n \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}w_1^{jk}z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{k}w_1^{jk}z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}\left(\sum_{j=0}^{n-1}w_1^{jk}\right) \\
&= \left(\binom{n}{0}z^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}z^{n-k} + \binom{n}{n}z^0\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}w_1^{jk}\right) \\
&= z^n\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1}w_1^{j\cdot 0}\right)}_{\textit{Suma de 1's}} + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}z^{n-k}\right)\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k\right)}_{=0 \textit{ por b)}} + 1\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1}(w_1^n)^j\right)}_{\textit{Suma de 1's}} \\
&= z^n n + n \\
&= n(z^n+1)
\end{aligned}$$