MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 13: Complejos

18 de Junio de 2019

P1. Escriba en su forma cartesiana los siguientes complejos:

a) $(1-i)^4(1+i)^4$

b) $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$

c) $1+i+\dfrac{i-1}{|i-1|^2+i}$

P2. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+ib}+\frac{2}{a-ib}=1+i$$

P3. *a)* Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+i)^n+(1-i)^n \in \mathbb{R}$$

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|>1 \ \wedge \ \mathbb{I}\mathrm{m}(z)>0$. Demuestre que

$$\mathbb{I}\mathrm{m}(z+\frac{1}{z})>0$$

c) Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que

1) $(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2) \in \mathbb{R}$
2) $|z_1|^2+|z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$

P4. Encuentre las raíces cuartas del complejo $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

P5. Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2+x+1=0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1

P6. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raiz cubica de la unidad con $w \neq 1$. Pruebe que

$$(1+w)^3+(1+w^2)^9+(1+w^3)^6=62$$

P7. Calcule $cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$. *Hint: Utilice las raíces quintas de la unidad de manera adecuada.*

P8. Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:

$$w_0w_1+w_1w_2+\ldots+w_{n-2}w_{n-1}+w_{n-1}w_0=0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k=0$$

c) **[Propuesto]** Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Pruebe que:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(z+w_j)^n=n(z^n+1)$$

- Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dotado de las siguientes operaciones, donde $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d) \\ z \cdot w &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo
  1. $(0, 0)$ es el neutro de $(\mathbb{C}, +)$
  2. $(1, 0)$ es el neutro de $(\mathbb{C}, \cdot)$
  3. El inverso en $(\mathbb{C}, +)$ de (a, b) es $(-a, -b)$.
  4. El inverso en $(\mathbb{C}, \cdot)$ de $(a, b) \neq (0, 0)$ es $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$
- La unidad imaginaria es el complejo (0,1). Se anotará como i. Se cumple que $i^2 = -1$
- **Forma cartesiana:** La expresión $a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se llama la *forma cartesiana* del complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$.
- Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos la parte real y la parte imaginaria respectivamente como:

$$\mathbb{R}\text{e}(z) = a \qquad \mathbb{I}\text{m}(z) = b$$

- $\mathbb{R}\text{e}(\cdot)$ y $\mathbb{I}\text{m}(\cdot)$ son morfismos de $(\mathbb{C}, +)$ en $(\mathbb{C}, +)$, es decir, son endomorfismos. Por lo tanto cumplen que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
  1. $\mathbb{R}\text{e}(z_1 + z_2) = \mathbb{R}\text{e}(z_1) + \mathbb{R}\text{e}(z_2)$.
  2. $\mathbb{I}\text{m}(z_1 + z_2) = \mathbb{I}\text{m}(z_1) + \mathbb{I}\text{m}(z_2)$.
- Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:
  1. $\mathbb{R}\text{e}(\lambda z) = \lambda \mathbb{R}\text{e}(z)$.
  2. $\mathbb{I}\text{m}(\lambda z) = \lambda \mathbb{I}\text{m}(z)$.
  3. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow [\mathbb{R}\text{e}(z_1) = \mathbb{R}\text{e}(z_2) \wedge \mathbb{I}\text{m}(z_1) = \mathbb{I}\text{m}(z_2)]$
- se define para $n \in \mathbb{Z}$

$$i^n = \begin{cases} +1 & si \quad n \equiv_4 0 \\ +i & si \quad n \equiv_4 1 \\ -1 & si \quad n \equiv_4 2 \\ -i & si \quad n \equiv_4 3 \end{cases}$$

- Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, en virtud del teorema de pitagoras se define la distancia de z hasta el origen como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define su conjugado como $\overline{z} = a - bi$
- si $z = a + bi$. entonces se tiene la siguiente relación con su coordenada polar (r, θ)

$$a = rcos(\theta) \wedge b = rsen(\theta)$$

- $\arg(z)$ es el ángulo de z con el eje real. Se acostumbra a escoger un ángulo en el rango $(-\pi, \pi]$.
- Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos $e^{i\theta}$ como:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

  Dado $z \in \mathbb{C}$ su **forma polar** es $|z|e^{iarg(z)}$
- Sea $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, entonces:
  1. $|e^{i\theta}| = 1$.
  2. $\overline{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$.
  3. $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$.
  4. $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces:
  1. $\overline{\overline{z}} = z$.
  2. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$.
  3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$.
  4. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Si $w \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
  5. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$.
  6. $\mathbb{R}\text{e}(z) = \mathbb{R}\text{e}(\overline{z})$ y $\mathbb{I}\text{m}(z) = -\mathbb{I}\text{m}(\overline{z})$.
  7. $\mathbb{R}\text{e}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $\mathbb{I}\text{m}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
  8. Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\overline{1}}{|z|}e^{-iarg(z)}$
  9. $|z| = |\overline{z}|$
  10. $arg(\overline{z}) = 2\pi - arg(z)$
  11. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
  12. $|zw| = |z||w|$ y $|z + w| \leq |z| + |w|$.
  13. Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
  14. Si $w \neq 0$, entonces $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.
- Si $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$, entonces existe algún $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \varphi + 2k\pi$.
- Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raiz n-ésima de la unidad si $z^n = 1$.
- Las raices n-ésimas de la unidad son de la forma $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
- Sea $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raiz n-ésima de w si $w^n = 1$.
- Las raices n-ésimas de $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ son de la forma $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
- Sea $n \geq 2$. La suma de las n raíces n-ésimas de la unidad vale 0.