MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 12: Lagrange, Anillos y Cuerpos

11 de Junio de 2019

P1. Sea $(G, *)$ un grupo tal que $|G|$ es finito.

a) Demuestre que si existe $x \in G \setminus \{e\}$ tal que $x = x^{-1}$, entonces $|G|$ es par.

b) Suponga ahora que $|G| = 6$. Demuestre que no existe $x \in G$, tal que $x^4 = e$ y $x \neq e$, $x^2 \neq e$.

c) **[Propuesto]** Suponga ahora que $|G| = 4$. Encuentre el máximo número de subgrupos para $(G, *)$.

P2. Sea $(G, *)$ es un grupo con neutro e.

a) Demuestre que si H, K son subgrupos de G entonces $H \cap K$ también lo es.

b) Demuestre que si H, K son subgrupos de G, tales que $|H| = 38$ y $|K| = 55$. Demostrar que $H \cap K = \{e\}$.

P3. En $\mathbb{Z}^2$ se definen las siguientes leyes de composición interna:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, 0)$$

Sabiendo que $(\mathbb{Z}^2, \oplus)$ es grupo Abeliano (no lo demuestre).

(i) Verifique que $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo.

(ii) Averigüe si $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ tiene unidad y/o divisores de cero. ¿Es $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ cuerpo? Justifique.

P4. Sean $(A, +, \cdot)$ y $(B, \oplus, \odot)$ dos anillos con unidad. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, es decir:

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y) \qquad f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y) \qquad f(1_A) = 1_B$$

a) Demuestre que para todo $a \in A$, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

b) Demuestre que $f(0_A) = 0_B$.

c) Demuestre que si todo $a \in A$ es invertible salvo 0_A, entonces f es inyectiva.

P5. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Definimos las siguientes operaciones sobre $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \qquad (a, b) \oplus (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

Se sabe (no lo demuestre) que $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

a) Encuentre el neutro para $\oplus$ y el neutro para $\odot$.

b) Demuestre que $\forall (a, b) \in (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathbb{K} \times \mathbb{K}}\}$:

$$(a, b) \text{ es divisor del } 0 \iff (a, b) \text{ no es invertible}$$

c) ¿Es $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ un cuerpo? Argumente.

P6. [Propuesto: Divisores del Cero]
Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

a) Si $a \in A$ es un divisor del cero y $b \in A$ cualquiera, demuestre que si $a \cdot b \neq 0$, entonces $a \cdot b$ es un divisor del cero.

b) Demuestre que si el producto de dos elementos de A es un divisor de cero, entonces al menos uno de ellos es un divisor de cero.

- Sea $(G, *)$ un grupo, y sea $H \subseteq G$. Diremos que H es subgrupo de G si $(H, *)$ también es grupo.
- **Caracterización de Subgrupo:** Sea $H \neq \emptyset$, entonces:

  $$(H, *) \text{ subgrupo de } (G, *) \Leftrightarrow (\forall x, y \in H)\; x * y^{-1} \in H$$

- $(\mathbf{Z}_n, +_n)$ es un grupo abeliano.
- **Teorema de Lagrange:** Sea $(G, *)$ un grupo finito y $(H, *)$ un subgrupo de $(G, *)$. Entonces $|H|$ divide a $|G|$.
- Sea $(G, *)$ un grupo. A $|G|$ le llamaremos el orden del grupo.
- Si $f : G \to H$ es un morfismo y tanto $(G, *)$ como $(H, *)$ son grupos, entonces:
  1. $f(e_G) = e_H$.
  2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
- A una estructura $(A, +, \cdot)$ le llamaremos anillo si satisface:
  1. $(A, +)$ es un grupo abeliano.
  2. $\cdot$ es asociativa.
  3. $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, tenemos la siguiente notación:
  1. Al neutro de $(A, +)$ se le suele denotar por 0, mientras que el inverso de x para $+$ se denota por $-x$.
  2. Si $(A, \cdot)$ tiene neutro a dicho neutro le llamaremos 1, más aún diremos que $(A, +, \cdot)$ es un anillo con unidad. Si $x \in A$ posee inverso para $\cdot$ lo denotaremos por x^{-1}.
  3. Si $\cdot$ es conmutativa, diremos que $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.
- Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo con unidad y $|A| \geq 2$, entonces $0 \neq 1$.
- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, entonces:
  1. 0 es absorbente.
  2. $(\forall x, y \in A)$, $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.
  3. $(\forall x, y \in A)$, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
  4. Si A tiene unidad:

     $$(\forall x \in A)\; -x = (-1) \cdot x = x \cdot (-1)$$

- $(\mathbf{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ es un anillo conmutativo con unidad.
- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Si $x, y \in A \setminus \{0\}$ son tales que $x \cdot y = 0$, diremos que x e y son divisores del 0.
- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo y $a \in A \setminus \{0\}$, luego:

  $$a \text{ es divisor del } 0 \Longleftrightarrow a \text{ no es cancelable}$$

- Sean $(A, +, \cdot)$ y $(B, \oplus, \odot)$ dos anillos con unidad. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, es decir:

  $$f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \quad \wedge \quad f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$$
  $$\wedge \quad f(1_A) = 1_B$$

- Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad tal que todo $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$, diremos que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo.
- De manera equivalente $(\mathbb{K}+, \cdot)$ es un cuerpo si y sólo si:
  1. $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano.
  2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
  3. $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ son cuerpos.
- Un cuerpo no tiene divisores del 0.
- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad tal que $|A|$ es finito. Entonces $(A, +, \cdot)$ no tiene divisores del cero si y sólo si $(A, +, \cdot)$ es un cuerpo.
- $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ es un cuerpo $\iff$ n es un primo.
- Si $(A, +, \cdot)$ es un dominio de integridad con $|A|$ finito, entonces $(A, +, \cdot)$ es cuerpo.