MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 11: Estructuras Algebraicas II

05 de Junio de 2019

- Si $(G, *)$ es una estructura algebraica asociativa, con neutro y tal que todo elemento es invertible, entonces diremos que $(G, *)$ es un grupo. Si ademas la operación $*$ es conmutativa, diremos que es un grupo abeliano.
- Sea $(G, *)$ un grupo, entonces:
  1. El inverso de cada elemento es único.
  2. $(\forall x \in G)$, $(x^{-1})^{-1} = x$.
  3. $(\forall x, y \in G)$, $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
  4. Todo elemento $x \in G$ es cancelable.
  5. Para todo $a, b \in G$, las ecuaciones:
  $$a * x_1 = b$$
  $$x_2 * a = b$$
  tienen solución única. Ellas son $x_1 = a^{-1} * b$ y $x_2 = b * a^{-1}$.
  6. El **único** elemento idempotente de G es su neutro.

P1. Si G es un grupo tal que $(ab)^2 = a^2b^2$ para todo $a, b \in G$, entonces muestre que G debe ser abeliano.

P2. Sea $(G, *)$ una estructura asociativa, con neutro y tal que todos sus elementos son invertibles (a esto le llamaremos grupo).

a) Demuestre que cada fila y cada columna de la tabla de multiplicación de $(G, *)$ posee cada elemento de G una única vez.

b) Complete las siguientes tablas de multiplicación asumiendo que son la tabla de multiplicación de una estructura asociativa, con neutro y tal que todos sus elementos son invertibles.

$*$	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c		d		b
d				

$*$	p	q	r	s	t	u
p			q			
q	r					
r					r	
s		p				
t						
u	t					p

P3. Considere $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$

a) Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$

b) Explique por qué $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ no es un grupo.

c) Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.

P4. Considere $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ con la operación $\oplus$ definida por

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a +_2 c, b +_3 d)$$

a) Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es un grupo.

b) Construya un isomorfismo $f : (\mathbb{Z}_6, +_6) \to (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ tal que $f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$. Concluya que es único.