MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 10: Estructuras Algebraicas y No Numerabilidad

04 de Junio de 2019

P1. Demuestre que los siguientes conjuntos son no numerables.

a) Los números irracionales.

b) $A \times B$. Donde A es un conjunto no numerable y $B \neq \emptyset$

Solución 1.

a) *Supongamos en busca de una contradicción que los numeros irracionales* $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *son a lo más numerables. En dicho caso:*

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Luego $\mathbb{R}$ *sería la unión de de un numerable con un numerable o finito y por tanto es numerable, lo que es una contradicción.*

b) *Como* $B \neq \emptyset$ *tenemos que existe* $b \in B$. *Definamos* $f : A \to A \times B$ *como:*

$$f(a) = (a, b)$$

Veamos que esta función es inyectiva, en efecto si $f(a) = f(a')$, *entonces* $(a, b) = (a', b)$ *de donde* $a = a'$. *Como encontramos una inyección de* A *en* $A \times B$ *y* A *es no numerable concluimos que:*

$$|\mathbb{N}| < |A| \leq |A \times B|$$

Es decir $A \times B$ *es no numerable.*

P2. Se define $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ por

$$(a.b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

a) Estudiar conmutatividad y asociatividad de $*$

b) Determine el neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$

c) Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.

d) Determine los elementos idempotentes de $(\mathbb{R}^2, *)$

Solución 2.

a) *Primero estudiaremos la conmutatividad ya que de tener esta propiedad nos ahorraremos trabajo en el futuro (por ejemplo, para el caso del neutro debemos probar que es neutro por ambos lados, y de tener la conmutatividad solo probaremos por un lado la propiedad de neutro).*

1) ***[Conmutatividad]*** *Debemos ver si se verifica que* $(a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)$.
Primero notemos que $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$ *y por otro lado* $(c, d) * (a, b) = (ca, da + b)$ *donde podemos darnos cuenta que las primeras coordenadas son iguales pues* $ca = ac$ *pero en general* $bc + d \neq da + b$. *Por lo que no es conmutativa.*

2) ***[Asociatividad]*** *Debemos probar que* $(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = [(a, b) * (c, d)] * (e, f)$ *para* a, b, c, d, e, f *arbitrarios. Veremos el resultado del lado izquierdo y el lado derecho por separado, en caso de ser iguales se concluira que se cumple la asociatividad.*
Primero el lado izquierdo

$$\begin{aligned}(a, b) * [(c, d) * (e, f)] &= (a, b) * [ce, de + f] \\ &= (ace, bce + de + f)\end{aligned}$$

Ahora el lado derecho

$$\begin{aligned}[(a, b) * (c, d)] * (e, f) &= (ac, bc + d) * (e, f) \\ &= (ace, (bc + d)e + f) \\ &= (ace, bce + de + f)\end{aligned}$$

Luego, como $(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = [(a, b) * (c, d)] * (e, f) == (ace, bce + de + f)$ *se concluye que* $*$ *es asociativo.*

b) *Sea* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *para encontrar el neutro lo que haremos es resolver la siguiente ecuación:*

$$(a, b) * (x, y) = (a, b)$$

Luego, al resolver esta ecuación, se tendrá que (x, y) *es nuestra propuesta para ser neutro. Para verificar que efectivamente es el neutro Debemos probar que*

$$(a, b) * (x, y) = (a, b) * (x, y) = (a, b)$$

Es decir, que actue como neutro por ambos lados.
Entonces

$$\begin{aligned} & (a, b) * (x, y) && = (a, b) \\ \iff & (ax, bx + y) && = (a, b) \\ \iff & ax = a \wedge bx + y = b && \end{aligned}$$

De lo ultimo, podemos verificar que $x = 1$ *y reemplazando* x *en la otra igualdad, se tiene que* $bx + y = b \iff b + y = b \Rightarrow y = 0$. *Por lo tanto, nuestra propuesta de neutro es* $(x, y) = (1, 0)$.
Ahora verifiquemos que es neutro.

$$(a, b) * (x, y) = (a, b) * (1, 0) = (a \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (a, b)$$

Claramente esta dirección iba a resultar pues ocupamos esta dirección ocupamos para encontrar (x, y). *Luego, viendo la otra dirección*

$$(x, y) * (a, b) = (1, 0) * (a, b) = (1 \cdot a, 0 \cdot a + b) = (a, b)$$

Por lo tanto, por ambos lados $(1, 0)$ *actúa como neutro. Con esto se concluye que* $(1, 0)$ *es neutro para* $*$.

c) *Siguiendo la idea anterior. Sea* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *debemos ver que propiedades debe verificar* a *y* b *para que sea invertible, para esto usaremos la ecuación.*

$$(a, b) * (x, y) = (1, 0)$$

De aqui, despejaremos x *e* y *y veremos que deben cumplir para esto.*
Entonces $(a, b)*(x, y) = (ax, bx+y)$, *si imponemos que sea igual a* $(1, 0)$ *se tiene que* $(ax, bx+y) = (1, 0)$
De aqui, concluimos que

$$x = \frac{1}{a} \quad \wedge \quad y = -bx$$

De donde necesitamos que a *sea invertible para la multiplicación usual en* $\mathbb{R}$ *y que* b *tenga inverso aditivo.*
Notemos que todos los números en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y todos los números en* $\mathbb{R}$ *tienen inverso aditivo. Luego* (a, b) *es invertible en* $*$ *si* $a \neq 0$.

d) *Para ver que elementos son idempotentes debemos estudiar la ecuación* $(a, b) * (a, b) = (a, b)$. *Notar que por definición el neutro es idempotente, ya que,* $(1, 0) * (1, 0) = (1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0) = (1, 0)$.
Ahora, veamos que otro elemento es idempotente mediante la ecuación que vimos anteriormente. Notemos que $(a, b) * (a, b) = (a, b)$ *equivale a* $(a^2, ba + b) = (a, b)$. *Por igualdad de los pares ordenados se tiene que*

$$a^2 = a \quad \wedge \quad ba + b = b$$

De lo anterior podemos ver que $a = 0 \ \vee \ a = 1$ *y que* $ba = 0$.

Notemos que si $a = 0$, *entonces da lo mismo el valor de* b *ya que* $b \cdot 0 = 0$ *por lo que los elementos de la forma* $(0, b)$ *son idempotentes.*
Por otro lado si $a = 1$ *entonces* $ba = 0$ *equivale a* $b = 0$, *por lo que* $(1, 0)$ *es otro elemento idempotente, pero este es el neutro y ya lo habiamos considerado.*

Por lo tanto, los elementos idempotentes son:

- *el neutro:* $(1, 0)$
- *elementos de la forma* $(0, b)$ *para* $b \in \mathbb{R}$ *cualquiera.*

P3. Sea $(S, \star)$ una estructura algebraica con neutro e y $\star$ una operación asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $\star$ y con inverso $a^{-1} \in S$, definimos una nueva operación $\triangle$ en S dada por:

$$(\forall x, y \in S) \qquad x \triangle y = x \star a \star y.$$

a) Demuestre que $\triangle$ es una ley de composición interna (en adelante, l.c.i.) asociativa.

b) Determine si $\triangle$ tiene neutro, y calcúlelo en caso de existir.

c) Caracterice los elementos invertibles para $\triangle$, y calcule el inverso de a con respecto a $\triangle$.

Solución 3.

a) *Debemos ver que $\triangle$ es l.c.i. y además es asociativa. Veremos cada uno por separado.*

- ***[Lci]*** *Para probar que $\triangle$ es lci, debemos probar que $\forall x, y \in S$ se tiene que $x \triangle y \in S$.*
  En efecto, sea $x, y \in S$ arbitrarios. Notemos que

$$\begin{aligned} x \triangle y &= x * a * y && \textit{definicion } \triangle \\ &= (x * a) * y && \textit{asociatividad de } * \end{aligned}$$

  De esto ultimo, podemos concluir que $(x * a) \in S$ pues $*$ es lci en S. Entonces, como $(x * a) \in S \ \wedge \ y \in S$ se tiene que $(x * a) * y \in S$ pues, nuevamente, $*$ es lci en S.
  Entonces, $(x * a) * y \in S$ y esto equivale a $x \triangle y \in S$. Por lo tanto $\triangle$ es Lci.

- ***[Asociatividad]*** *Veamos que $\triangle$ es asociativo: Sea $x, y, z \in S$ arbitrarios*

$$\begin{aligned} (x \triangle y) \triangle z &= (x * a * y) \triangle z \\ &= (x * a * y) * a * z \\ &= x * a * (y * a * z) \\ &= x \triangle (y * a * z) \\ &= x \triangle (y \triangle z) \end{aligned}$$

  En donde se ocupo asociatividad de $*$.
  Por lo tanto, $\triangle$ es asociativo.

b) *Para determinar el neutro haremos lo mismo que en la pregunta anterior, despejar $e_\triangle$ en la ecuación $x \triangle e_\triangle = x$ para encontrar un candidato y luego verificando que actua como neutro por ambos lados.*
Entonces

$$\begin{aligned} x \triangle e_\triangle &= x \\ x * a * e_\triangle &= x \\ x * (a * e_\triangle) &= x \end{aligned}$$

Y notemos que por enunciado sabemos que e es neutro de $*$ y además por apunte este es único. Luego, de nuestra ecuación, tenemos que

$$x * \underbrace{(a * e_\triangle)}_{e} = x$$

Es decir, $a * e_\triangle = e$ pues al operarse con x el resultado es x (por lo que actua como neutro y este es unico).
Además por enunciado sabemos que a tiene inverso, por lo que de la parte anterior y operando por ambos lados $a^{-1} *$ se tiene que

$$\begin{aligned}
& & a * e_{\triangle} &= e & & /a^{-1}* \\
&\Rightarrow & a^{-1} * a * e_{\triangle} &= a^{-1} * e & & \textit{asociando} \\
&\Rightarrow & (a^{-1} * a) * e_{\triangle} &= a^{-1} & & a * a^{-1} = e \\
&\Rightarrow & e * e_{\triangle} &= a^{-1} & & e * x = x, \forall x \in S \\
&\Rightarrow & e_{\triangle} &= a^{-1} & &
\end{aligned}$$

Luego, nuestro candidato para neutro de $\triangle$ *es* $e_{\triangle} = a^{-1}$. *De esta manera:*

$$x \triangle a^{-1} = x * a * a^{-1} = x * e = x$$

y por otro lado

$$a^{-1} \triangle x = a^{-1} * a * x = e * x = x$$

Por lo tanto $e_{\triangle} = a^{-1}$ *es neutro para* $\triangle$.

c) *Lo mismo de la pregunta anterior. Se tiene que el inverso de* x *en* $(S, \triangle)$ *es de la forma* $a^{-1} * x^{-1} * a^{-1}$. *Donde* x^{-1} *es el inverso de* x *en* $(S, *)$

P4. Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ por:

$$x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$$

Muestre que la biyección $f(x) = x^5$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$

Solución 4. *Notemos que debemos probar que f es morfismo y además es biyectiva.*

Notemos primero que es f es biyectiva ya que es podemos proponer su función inversa $g(x) = x^{\frac{1}{5}}$ ya que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{5}}) = (x^{\frac{1}{5}})^5 = x = id_{\mathbb{R}}(x)$

y por otro lado $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^5) = (x^5)^{\frac{1}{5}} = x = id_{\mathbb{R}}(x)$

Luego f es biyectiva pues tiene inversa (vimos que g actuaba como inversa por ambos lados). Falta probar que f es morfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$, es decir, debemos probar que $\forall x, y \in R,\ f(x * y) = f(x) + f(y)$

En efecto, sea $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios, entonces

$$f(x * y) = (\sqrt[5]{x^5 + y^5})^5 = x^5 + y^5 = f(x) + f(y)$$

Por lo tanto, f es morfismo.

Finalmente, como f es morfismo y es biyectiva se concluye que f es isomorfismo.

P5. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la l.c.i. $*$ como:

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que:

a) $*$ es conmutativa.

b) $(\mathcal{F}, *)$ posee elemento neutro, y encuntrelo.

c) $*$ distribuye con respecto a la suma de funciones, es decir, pruebe que $[h*(f+g)](n) = [h*f](n)+[h*g](n)$.

d) Propuesto: pruebe que $*$ es asociativo.
Hint: en vez de sumar por filas sume por columnas en la doble sumatoria.

Solución 5.

a) *Sean $f, g \in \mathcal{F}$. Luego:*

$$\begin{aligned}
(f * g)(n) &= \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) \\
&= f(0)g(n) + f(1)g(n-1) + \cdots + f(n-1)g(1) + f(n)g(0) \\
&= g(0)f(n) + g(1)f(n-1) + \cdots + g(n-1)f(1) + g(n)f(0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} g(k)f(n-k) \\
&= (g * f)(n)
\end{aligned}$$

b) *Queremos encontrar un g tal que:*

$$(f * g)(n) = f(n)$$

Basta por un lado, pues la operación s conmutativa. Notemos que el termino $f(n)$ ya aparece en la operación, pues:

$$(f * g)(n) = f(0)g(n) + f(1)g(n-1) + \cdots + f(n-1)g(1) + f(n)g(0)$$

Nos gustaría tomar un g entonces que mate a todos los otros elementos de la suma, salvo $f(n)$. Esto hace nacer la idea de tomar:

$$g(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

En efecto veamos que es el neutro:

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) = f(n)\underbrace{g(0)}_{=1} + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\underbrace{g(n-k)}_{=0} = f(n)$$

De donde vemos que g es el neutro.

c) *De nuevo como la operación es conmutativa, basta con chequear la distributividad por un lado. Sean $f, g, h \in \mathcal{F}$.*

$$\begin{aligned}
([f+g] * h)(n) &= \sum_{k=0}^{n} (f+g)(k)h(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} [f(k) + g(k)]h(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} f(k)h(n-k) + \sum_{k=0}^{n} g(k)h(n-k) \\
&= (f * h)(n) + (g * h)(n)
\end{aligned}$$

De donde se concluye.

d)

$$
\begin{aligned}
((f \star g) \star h)(n) &= \sum_{k=0}^{n} (f \star g)(k) h(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} f(l) g(k-l) h(n-k) \\
&= \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} f(l) g(k-l) h(n-k) \\
&= \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l} f(l) g(k) h(n-k-l) \\
&= \sum_{l=0}^{n} f(l) (g \star h)(n-l) \\
&= (f \star (g \star h))(n)
\end{aligned}
$$