MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 10: Estructuras Algebraicas y No Numerabilidad

04 de Junio de 2019

P1. Demuestre que los siguientes conjuntos son no numerables.

a) Los números irracionales.

b) $A \times B$. Donde A es un conjunto no numerable y $B \neq \emptyset$

P2. Se define $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ por

$$(a.b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

a) Estudiar conmutatividad y asociatividad de $*$

b) Determine el neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$

c) Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.

d) Determine los elementos idempotentes de $(\mathbb{R}^2, *)$

P3. Sea $(S, \star)$ una estructura algebraica con neutro e y $\star$ una operación asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $\star$ y con inverso $a^{-1} \in S$, definimos una nueva operación $\triangle$ en S dada por:

$$(\forall x, y \in S) \qquad x \triangle y = x \star a \star y.$$

a) Demuestre que $\triangle$ es una ley de composición interna (en adelante, l.c.i.) asociativa.

b) Determine si $\triangle$ tiene neutro, y calcúlelo en caso de existir.

c) Caracterice los elementos invertibles para $\triangle$, y calcule el inverso de a con respecto a $\triangle$.

P4. Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ por:

$$x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$$

Muestre que la biyección $f(x) = x^5$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$

P5. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la l.c.i. $*$ como:

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que:

a) $*$ es conmutativa.

b) $(\mathcal{F}, *)$ posee elemento neutro, y encuntrelo.

c) $*$ distribuye con respecto a la suma de funciones, es decir, pruebe que $[h*(f+g)](n) = [h*f](n)+[h*g](n)$.

d) Propuesto: pruebe que $*$ es asociativo.
Hint: en vez de sumar por filas sume por columnas en la doble sumatoria.

- Dado un conjunto A no vacío. Diremos que $*$ es una ley de composición interna (l.c.i) si $*$ es una función
$$\begin{aligned} * : A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$
- Si $*$ es una l.c.i definida en un conjunto A, entonces al par $(A, *)$ lo llamaremos **estructura algebraica**.
Si sobre A tenemos definida una segunda operación $\triangle$, denotaremos $(A, *, \triangle)$ a la estructura algebraica que considera ambas l.c.i en A
- Sea $(A, *)$ una estructura algebraica.
  1. Diremos que $*$ es **asociativa** si
  $$\forall x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z)$$
  2. Sea $e \in A$. Diremos que e es elemento **neutro para *** si
  $$\forall x \in A, e * x = x * e = x$$
  3. Si $e \in A$ es el neutro para $*$, diremos que $x \in A$ es **invertible si:**
  $$\exists y \in A, y * x = x * y = e$$
  En tal caso, diremos que existe inverso de x y más aun y es un inverso de x
  4. Diremos que $*$ es **conmutativa** si
  $$\forall x, y \in A, x * y = y * x$$
  5. Sea $a \in A$. Diremos que a es **absorbente** si:
  $$\forall x \in A, x * a = a * x = a$$
  6. Sea $a \in A$. Diremos que a es **idempotente** si $a * a = a$
  7. Sea $a \in A$. Diremos que a es **cancelable** si $\forall y, z \in A$ se tienen:
  $$a * y = a * z \Rightarrow y = z$$
  $$y * a = z * a \Rightarrow y = z$$
  8. Sea $(A, *, \triangle)$ una estructura algebraica con dos operaciones. Diremos que $\triangle$ **distribuye** con respecto a $*$ si para todo $x, y, z \in A$, se tienen:
  $$x \triangle (y * z) = (x \triangle y) * (x \triangle z)$$
  $$(y * z) \triangle x = (y \triangle x) * (z \triangle x)$$
- Sea (A,*) una estructura algebraica. Se tiene que $a \in A$ es cancelable si y sólo si las funciones I_a y D_a definidas por $I_a(x) = a * x$ y $D_a(x) = x * a$ para $x \in A$, son inyectivas.
- En una estructura algebraica $(A, *)$, el elemento neutro es **único**.
- Si la estructura algebraica $(A, *)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos son unicos.
De esta forma el inverso de $x \in A$, lo podemos denotar sin ambigüedad como x^{-1}
- Sea $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa y con neutro $e \in A$ entonces:
  1. Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aun, $(x^{-1})^{-1} = x$
  2. Si $x, y \in A$ son invertibles entonces $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$
  3. Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.
- Se define $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\equiv_n$. A partir de esto podemos definir:
  - $[x]_n + [y]_n = [x + y]_n$
  - $[x]_n \cdot [y]_n = [x \cdot y]_n$

  Recordemos además que si $x \equiv_n y$, entonces $[x]_n = [y]_n$
- Sea $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 \equiv_n x_2$ y $y_1 \equiv_n y_2$. Entonces
$$(x_1 + y_1) \equiv_n (x_2 + y_2) \text{ y } (x_1 \cdot y_1) \equiv_n (x_2 \cdot y_2)$$
Es decir, si $[x_1]_n = [x_2]_n$ y $[y_1]_n = [y_2]_n$, entonces
$$[x_1 + y_1]_n = [x_2 + y_2]_n \text{ y } [x_1 \dot{y}_1]_n = [x_2 \cdot y_2]_n$$
- (*Notación*) $x \equiv_n y \iff x = y \pmod{n}$
- Para dos estructuras $(A, *), (B, \triangle)$ una función $f : A \to B$ es un **homomorfimos** de $(A, *)$ en $(B, \triangle)$ si $\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$.
  - Si f es inyectiva se llamará monomorfismo
  - Si f es epiyectiva se llamará epimorfimos
  - si f es biyectiva se llamará isomorfimos
  - Si $(A, *) = (B, \triangle)$ los homomorfimos se llamaran endomorfimos y en caso que si el endomorfimo es biyectivo se llamará automorfismo.
- Sea $f : A \to B$ un epimorfimos entre $(A, *)$ y $(B, \triangle)$, entonces se tienen las siguientes propiedadess:
  1. Si $(A, *)$ es asociativo, entonces $(B, \triangle)$ también lo es
  2. Si $(A, *)$ es conmutativo, entonces $(B, \triangle)$ también lo es
  3. Si e es neutro de $(A, *)$, entonces $f(e)$ es neutro de $(B, \triangle)$
  4. Si $a \in A$ tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para $(B, \triangle)$, es decir $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$

  3 y 4 están sujetas a que el neutro de $(B, \triangle)$ esté en la imagen de f
- Sea f un homomorfismo de $(A, *)$ en $(B, \triangle)$, no necesariamente epiyectivo, con neutros e_A y e_B respectivamente.
  1. Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(a_A)$
  2. Si $e_B \in f(A)$ y $a \in A$ tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para $(B, \triangle)$
- Sean $(A, *)$ y $(B, \triangle)$ con neutros e_A y e_B respectivamente y donde todos los elementos son invertibles. Un homomorfimos $f : A \to B$ de $(A, *)$ en $(B.\triangle)$ es un monomorfismo, es decir es inyectivo, si y sólo si, $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$
- Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de $(A, *)$ en $(B, \triangle)$ y $g : B \to C$ un homomorfismo de $(B, \triangle)$ en $(C, \bullet)$. Entonces la composición $g \circ f : A \to C$, es un homomorfismo de $(A, *)$ en $(C, \bullet)$
- Dos estructuras $(A, *)$ y $(B, \triangle)$ son isomorfas, denotada $(A, *) \cong (B, \triangle)$, si existe una función $f : A \to B$ que es un isomorfismo entre $(A, *)$ y $(B, \triangle)$
- Si $f : A \to B$ es un isomorfismo entre $(A, *)$ y $(B, \triangle)$, entonces $f^{-1} : B \to A$ es un isomorfismo entre $(B, \triangle)$ y $(A, *)$
- La relación $\cong$ entre estructuras algebraicas es relación de equivalencia