

Auxiliar 9

P1 La secuencia $(x_0, x_1, \dots)$ es infinita
 donde $x_i \in A \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Procedamos por contradicción, supongamos
 que $\forall i, j \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_i = x_j$

$\Rightarrow$ la secuencia $(x_0, \dots, x_n, \dots)$ sigue
 siendo infinita, y con cada elemento distinto

Ahora podemos tomar una parte de la
 secuencia, digamos $(x_0, \dots, x_{n+1})$,

luego el cto formado por $\{x_0, \dots, x_{n+1}\}$
 tiene cardinal $n+2$ (hay $n+2$ elementos,
 desde x_0 a x_{n+1}) pues todos los x_k
 son distintos.

Pero como $\forall x_k \in \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$

, cumple que $x_k \in A$

$$\Rightarrow \{x_0, \dots, x_{n+1}\} \subseteq A$$

$$\Rightarrow |\{x_0, \dots, x_{n+1}\}| \leq |A|$$

$$\Leftrightarrow n+2 \leq n+1$$

lo que es una contradicción

P2 notemos que si

$$n=1 \Rightarrow 0 \leq i \leq 2^0 \Leftrightarrow 0 \leq i < 1 \Rightarrow i=0$$

$$\Rightarrow 2^{i+1} \in \{1, 4\}$$

$$n=2 \Rightarrow 0 \leq i \leq 2^1 \Leftrightarrow 0 \leq i < 2 \Rightarrow i=0, 1$$

$$\Rightarrow 2^{i+1} \in \{1, 3, 5\}$$

$$n=3 \Rightarrow 0 \leq i \leq 2^2 \Leftrightarrow 0 \leq i < 4 \Rightarrow i=0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow 2^{i+1} \in \{1, 3, 5, 7\}$$

Luego se puede ver que

$$\{2^{i+1} : 0 \leq i < 2^{m-1}\} \supseteq \{2^{i+1} : 0 \leq i < 2^{k-1}\}$$

$\forall k \leq m$ ya que

$$0 \leq i < 2^{k-1} \leq 2^{m-1}$$

pues $k \leq m$ y la función 2^x es creciente

$$\Rightarrow |\{2^{i+1} : i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{1, \dots, m\}\}| = |\{2^{i+1} : i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{m-1}\}|$$

y este ultimo tiene 2^{m-1} elementos, que hasta acá está bien

Se puede probar mediante la biyección

$$f: \{0, \dots, 2^{m-1}-1\} \rightarrow \{2i+1 : i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{m-1}\}$$

$$x \mapsto f(x) = 2x+1$$

Lo cual es inyectiva por ser un "polinomio" de grado 1, y es eyectiva pues los elementos de la llegada son números impares de la forma

$$y = 2i+1, \text{ con } 0 \leq i < 2^{m-1}, \text{ por lo que basta}$$

$$\text{tomar } x = \frac{y-1}{2} \in \{0, \dots, 2^{m-1}-1\}$$

↓

Opcional

$$\boxed{P3} \Rightarrow \text{pda } \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

del lado derecho empezamos

$$\binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} = \frac{n!}{(n-m)! m!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-m)-(k-m)! (k-m)!}$$

$$= \frac{n!}{m!} \cdot \frac{1}{(n-k)! (k-m)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{m! (k-m)!} \cdot \frac{k!}{k!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! k!} \cdot \frac{k!}{m! (k-m)!} = \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

b) pdg $\sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 3^n$

En efecto

$$\sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^n \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

$$= \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{m} \binom{n-m}{k}$$

$$= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} 1^k \cdot (1)^{(n-m)-k}$$

$$= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 2^{n-m} \cdot 1^m$$

$$= (2+1)^n = 3^n$$

$$\begin{aligned}
 c) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{(-1)^k}{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! (k+1)!} (-1)^k \cdot \frac{n+1}{n+1}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(n-k)! (k+1)!} (-1)^k$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (-1)^k$$

Necesito que
 1) Contador parte en 0
 2) Si tengo $\binom{\alpha}{\beta}$, necesito
 que el límite superior de
 la sumatoria sea α
 3) Los números que acompañan
 a $\binom{\alpha}{\beta}$ sean de la forma
 $p \beta \quad q \alpha - \beta$

$$0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k + \binom{n+1}{0} (-1)^0 \\
 &\quad - \binom{n+1}{0} (-1)^0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k - 1 \right] \\
 &= \frac{-1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k (-1)^{n+1-k} - 1 \right] \\
 &= \frac{-1}{n+1} \left[(-1+1)^{n+1} - 1 \right] \\
 &= \frac{-1}{n+1} [0 - 1] = \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

P4 $A :=$ cto de todos los pares
 $B :=$ cto de todos los impares
 Claramente $|A|$ es infinito, es decir,
 $|A| \geq |\mathbb{N}|$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$ entonces
 $|A| \leq |\mathbb{N}|$, por teorema de CBS
 se tiene que $|A| = |\mathbb{N}|$. Análogamente se
 tiene que $|B| = |\mathbb{N}|$.

Sin embargo $A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow |A \cap B| = 0$ lo cual no
 es numerable

PS Por contradicción, supongamos que $B \in A$, A es infinito, B finito y que $A \setminus B$ es finito.

De esto, notamos que $A \cup B = A \setminus B \cup B$

y $A \setminus B$ con B son disjuntos y finitos

$$\Rightarrow |A \setminus B \cup B| = \underbrace{|A \setminus B|}_{\text{finito}} + \underbrace{|B|}_{\text{finito}}$$

por lo tanto $|A \setminus B \cup B|$ es finito

pero $A \cup B$ es infinito ya que A lo es

$\Rightarrow \Leftarrow$

$\therefore A \setminus B$ debe ser infinito

P6 a) falso, $A = B = C = \mathbb{N}$ $D = \{1, 4\}$

se cumple todo, salvo que $|C| = |D|$

b) falso, tomar $A = B = \mathbb{N}$ $C = \{\pi\}$

$$D = \emptyset$$

c) falso, $A = \text{pares}$ $B = \mathbb{N}$

P7 Veamos que el cjo pedido se puede escribir como

$$\Delta = \{ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) : x_i, y_i \in \mathbb{Q} \}$$

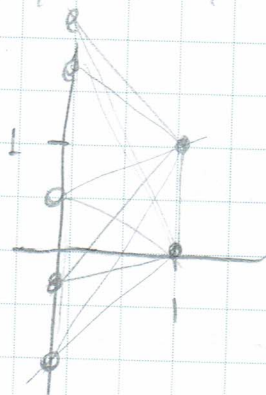
$i=1, 2, 3$

$\neq (x_i, y_i)_{i=1}^3$
Cumplan desigualdades

Veamos que $|\Delta| \geq |\mathbb{N}|$, es decir debemos probar que es infinito.

Para esto, armemos una sucesión de triángulos.

$$\text{Sea } t_n = \{ (1, 1), (1, 0), (0, n) \}$$



Claramente $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Delta$ pues

son puntos en $\mathbb{Q}$ que forman triángulos
y además $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es infinito ya que
"n" recorre todos los naturales.

Luego como Δ tiene un subconjunto infinito

$\Rightarrow \Delta$ es infinito, es decir, $|\Delta| \geq |\mathbb{N}|$

~~pero como~~

Ahora debemos probar que $|\Delta| \leq |\mathbb{N}|$

~~pero~~ para esto notemos que $\Delta \subseteq \mathbb{Q}^6$

ya que un triángulo consta de 3 puntos en el espacio, y cada punto son 2 parámetros en $\mathbb{Q}$

~~pero~~

$\Rightarrow$ Como $\Delta \subseteq \mathbb{Q}^6 \Rightarrow |\Delta| \leq |\mathbb{Q}^6|$

pero $\mathbb{Q}$ es numerable $\Rightarrow \mathbb{Q}^6$ es numerable

Luego $|\Delta| \leq |\mathbb{Q}^6| = |\mathbb{N}|$

Luego como $|\Delta| \leq |\mathbb{N}| \wedge |\Delta| \geq |\mathbb{N}|$

por Teorema de Cantor - Bernstein - Schröder

se cumple que $|\Delta| = |\mathbb{N}|$.

P8 a) pda $|F| = |A^3|$

Lo haremos por biyección siguiendo el hint
definimos $\varphi: F \rightarrow A^3$
 $f \mapsto \varphi(f) = (f(1), f(2), f(3))$

probemos que φ es biyectiva

Ing: sea $f, g \in F$ tales que

$$\varphi(f) = \varphi(g)$$

$$\Leftrightarrow (f(1), f(2), f(3)) = (g(1), g(2), g(3))$$

por coordenada
 $\Rightarrow$

$$f(1) = g(1)$$

$$f(2) = g(2)$$

$$f(3) = g(3)$$

es decir $\forall x \in \{1, 2, 3\}^{= \text{Dom}(f)}$, $f(x) = g(x)$
además $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ y $\text{Codom}(f) = \text{Codom}(g) = A$

$\therefore f = g$, por lo que φ es inyectiva

Epigeetiva: Sea $(\alpha, \beta, \gamma) \in A^3$ arbitrario, para obtener esta ~~per~~ tupla, basta tomar

$f^* \in F$ tal que $f^*(1) = \alpha$, $f^*(2) = \beta$,
 $f^*(3) = \gamma$ que está bien definido en su codominio
pues $\alpha, \beta, \gamma \in A$. De esta forma

$$\varphi(f^*) = (f^*(1), f^*(2), f^*(3)) = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \therefore \varphi \text{ es epigeetiva}$$

Como φ es inyectiva y epyectiva, se concluye que es biyectiva

b) si A es numerable, entonces A^3 tambien
y por la parte a), como $|F| = |A^3|$ y
 $|A^3| = |\mathbb{N}|$, se concluye que $|F| = |\mathbb{N}|$

El sistema de control de la temperatura de la habitación se compone de un termostato y un calentador.

El termostato mide la temperatura de la habitación y envía una señal al calentador.

El calentador calienta la habitación cuando la temperatura es baja.

El sistema de control de la temperatura de la habitación es un sistema de control de la temperatura.