MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 8: Sumatorias y Cardinalidad Finita

07 de Mayo de 2019

P1. Calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)} &= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(n+j-1)(n+j)} && [(n+k) \text{ no depende de j}]\\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n+j-1}-\frac{1}{n+j}\right) && \left[\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\left(\frac{1}{n+1-1}-\frac{1}{n+k}\right) && telescopica\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n}-\frac{n+k}{n+k} && distribuyo\ n+k\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n}-1 && simplificar\\
&= \sum_{k=1}^{n}1+\frac{k}{n}-1 && simplificar\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k && \text{expulsar constante}\\
&= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} && \text{suma conocida}\\
&= \frac{(n+1)}{2} && \text{Fin}
\end{aligned}
$$

P2. Considere, para $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ la suma

$$S = 1+\frac{1+2}{2}+\frac{1+2+3}{3}+\cdots+\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$$

Escriba S como una sumatoria doble y como ejercicio propuesto calcule su valor.

Vealo en la auxiliar 8 del 2018, la subi a ucursos

P3. *a)* Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_{i,j}$$

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)a_i$$

Vealo en la auxiliar 8 del 2018, la subi a ucursos

P4. Pruebe que $|A \times B| = |B \times A|$ con A y B finitos. ¿Es necesario que sean A y B finitos en su demostración?

Lo haremos por biyección, para estudiar que función nos puede servir que además sea biyectiva de $A \times B \to B \times A$, pensemos primero que hace $A \times B$ con respecto a $B \times A$, notemos que si tengo el par ordenado $(x, y) \in A \times B$, necesaria y suficientemente debo tener el par $(y, x) \in B \times A$. Es decir, la diferencia de estos dos conjuntos es simplemente que dan vuelta los pares ordenados, y esta será nuestra biyección.

Defino $\varphi : A \times B \to B \times A$ tal que para todo $(a, b) \in A \times B,\ \varphi(a, b) = (b, a)$, es decir, la función simplemente da vuelta el par ordenado.

Para ver que esta función es biyectiva podemos hacerlo de dos maneras.

- Forma 1, Viendo que es inyectiva y epiyectiva:
  En efecto, probemos primero inyectividad. Sea $(a, b), (c, d) \in A \times B$ arbitrarios, tal que $\varphi(a, b) = \varphi(c, d)$, entonces:

$$\begin{array}{rcr} & \varphi(a,b) = \varphi(c,d) & \textit{hipotesis} \\ \iff & (b,a) = (d,c) & \text{definición de } \varphi \\ \implies & b = d \wedge a = c & \text{definición par ordenado} \\ \implies & (a,b) = (c,d) & \text{igualdad por coordenada/ definición par ordenado} \end{array}$$

  Por lo tanto si $\varphi(a, b) = \varphi(c, d)$ entonces $(a, b) = (c, d)$ por lo que es inyectiva.
  Ahora veamos epiyectivadad: Sea $(w, z) \in B \times A$ arbitrario, para obtener este valor, basta tomar el par (z, w) que vive en $A \times B$ pues $w \in B$ y $z \in A$, ya que $\varphi(z, w) = (w, z)$, es decir obtuvimos el par ordenado que dijimos al principio. Por lo tanto es epiyectiva.
  Como φ es inyectiva y epiyectiva se tiene que es biyectiva. Por lo tanto como $\varphi : A \times B \to B \times A$ se tiene que $|A \times B| = |B \times A|$.
- Forma 2. Proponiendo una inversa y ver que es inversa por ambos lados:
  Propongo la función $g : B \times A \to A \times B$ tal que para todo $(x, y) \in B \times A,\ \varphi(x, y) = (y, x)$, es decir g hace lo mismo que φ en su respectivo dominio.
  De esto podemos notar que la composición por ambos lados existe pues coinciden los dominios y codominios de φ y g y se tiene que para $(x, y) \in B \times A$

$$(\varphi \circ g)(x, y) = \varphi(g(x, y)) = \varphi(y, x) = (x, y) = id_{B\times A}(x, y)$$

  y para $(a, b) \in A \times B$ se tiene que

$$(g \circ \varphi)(a, b) = g(\varphi(a, b)) = g(b, a) = (a, b) = id_{A\times B}(a, b)$$

  Por lo que por ambos lados es tiene que llego a una identidad, lo que cumple 2 de las 3 condiciones necesarias para que φ fuese biyectiva y con g su inversa (ver resumen de la auxiliar 5).
  Por lo tanto φ es biyectiva y por lo tanto, como $\varphi : A \times B \to B \times A$, se tiene que $|A \times B| = |B \times A|$.

Como en ningún lado ocupamos que fuese finito, este resultado se tiene para cualquier producto cruz de conjuntos.

P5. Sea $A = [0..n]$ y considere la secuencia $(x_0, x_1, \dots)$ de elementos en A. Pruebe que existen $\ell, j \in \mathbb{N}$ tales que $x_\ell = x_j$.

Hecha en auxiliar 9

P6. Demuestre que $|\{2i+1 : i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{1, \ldots, m\}\}| = 2^{m-1}$

Hecha en auxiliar 9