

Auxiliar #9

P1 Tenemos que $S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \dots + \frac{1+2+3+\dots+n}{n}$

$\underbrace{\quad}_{\textcircled{1}} \quad \underbrace{\quad}_{\textcircled{2}} \quad \underbrace{\quad}_{\textcircled{3}} \quad \dots \quad \underbrace{\quad}_{\textcircled{n}}$

Esta es una doble sumatoria ya que cada manzana en si es una sumatoria.

Primero veamos que se mantiene "cte" a través de los sumandos

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{1}} + \frac{1+\textcircled{2}}{\textcircled{2}} + \frac{1+2+\textcircled{3}}{\textcircled{3}} + \dots + \frac{1+2+3+\dots+\textcircled{n}}{\textcircled{n}} \\
 &= \sum_{i=1}^{\textcircled{1}} i + \sum_{i=1}^{\textcircled{2}} i + \sum_{i=1}^{\textcircled{3}} i + \dots + \sum_{i=1}^{\textcircled{n}} i \quad \text{va cambiando, merece índice} \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^n \frac{j^2+j}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{j(j+1)(2j+1)}{6} + \frac{j(j+1)}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_2} \quad a) \quad \sum_{i=5}^m \sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)} = \sum_{i=5}^m (i+1) \sum_{j=1}^i \frac{1}{j(j+1)}$$

↑ Fracciones parciales

F.P.

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{A}{j} + \frac{B}{j+1} = \frac{A(j+1) + Bj}{j(j+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{j(j+1)} = \frac{A(j+1) + Bj}{j(j+1)} \Rightarrow 1 = A(j+1) + Bj$$

$$\Leftrightarrow 0j + 1 = (A+B)j + A$$

$$\Rightarrow A = 1$$

$$A+B=0$$

$$\Rightarrow B = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=5}^m (i+1) \sum_{j=1}^i \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right)$$

Telescópica

$$= \sum_{i=5}^m (i+1) \left[1 - \frac{1}{i+1} \right]$$

$$= \sum_{i=5}^m (i+1) - \frac{i+1}{i+1}$$

$$= \sum_{i=5}^m i = \sum_{i=1}^m i - \sum_{i=1}^4 i$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} - \left(\frac{4 \cdot 5}{2} \right)$$

P2 b) $\Omega = \{(n-p) \in \mathbb{N} : 0 \leq p < n, p \in \mathbb{N}\}$

$$S = \sum_{j \in \Omega} \sum_{k=1}^j k + \frac{2^j}{j}$$

Notar que $\Omega = \{n-0, n-1, n-2, \dots, n-(n-1)\}$
 $= \{n, n-1, n-2, \dots, 1\}$
 $= \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow S = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k + \frac{2^j}{j}$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^j k + \frac{2^j}{j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j \cdot (j+1)}{2} + \frac{2^j}{j} \cdot j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} + 2^j$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^n 2^j$$

↪ seguir ustedes

P3 a) Pdg: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}$

En efecto, partamos de izq y lleguemos a la derecha

Como $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^1 a_{1,j} + \sum_{j=1}^2 a_{i,j} + \dots + \sum_{j=1}^n a_{i,j}$

$\star = (a_{1,1}) + (a_{2,1} + a_{2,2}) + \dots + (a_{n,1} + a_{n,2} + \dots + a_{n,n})$

Notar que jamás obtendré $a_{1,2}$ o $a_{1,3}, \dots$, etc. Si lo veo en una tabla, los elementos que sumaré se ven así:

	1	2	3	4	...	n
1	$a_{1,1}$	x	x	x		
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	x	x		
3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$			
4	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$		
...	...	...	...	...	...	...
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	$a_{n,4}$	...	$a_{n,n}$

debo sumar todos los elementos de la tabla

Notar que la forma en como se suma en $\star$, se va sumando fila por fila

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} && \left. \begin{array}{l} \text{cambio de} \\ \text{Sumatorias} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n b_{ij} && \swarrow \text{Si } i < j, \text{ con } j \text{ fijo} \Rightarrow b_{ij} = 0 \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij} && \swarrow b_{ij} = a_{ij} \text{ en esta condición}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij}$$

$$b) \text{ P.d.g. } \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^n (n-i+1) a_i$$

En efecto, por a)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n a_i \\
 &= \sum_{i=1}^n (n-i+1) a_i
 \end{aligned}$$



Lo que haremos sera en vez de sumar las filas, sumaremos las columnas y tendremos en la tabla

⇒

	1	2	3	...	n
1	$a_{1,1}$	X	X	...	X
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	X	...	X
3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	...	X
...	...	...	...	...	...
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	...	$a_{n,n}$

Sumamos por columnas

Pero ¿Cómo hacemos para sumar por columnas? porque estos son dibujos y no es una demostración.

Volvamos a las sumatorias.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} \rightarrow \text{definimos } b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

pues aquí está bien definido

$a_{i,j} = b_{i,j}$ en estas condiciones, ya que siempre $j \leq i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i b_{i,j}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j}$$

si $j = i+1, i+2, \dots, n$
 $b_{i,j} = 0$ y no
 agrega nada a la
 suma

P4 a) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$

a.1) Escribir suma de pares con $k=2i$, $i \in \{1, \dots, n\}$

Parer $\rightarrow \sum_{i=1}^n (-1)^{2i} (2i)^2$

donde $k=2i$, debo recorrer $2, 4, \dots, 2n$
 Luego si $k=2i$, con $i=1, 2, 3, \dots, n$, logro obtener $k=2, 4, \dots, 2n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \cancel{(-1)^{2i}}^{+1} (2i)^2 = \sum_{i=1}^n 4i^2$$

$$= 4 \sum_{i=1}^n i^2$$

a.2) Impares usando $k=2i-1$, con $i \in \{1, \dots, n\}$
 idem a lo anterior

Impares $\rightarrow \sum_{i=1}^n (-1)^{2i-1} (2i-1)^2 = \sum_{i=1}^n (-1)(2i-1)^2$

$$= - \sum_{i=1}^n 4i^2 - 2i + 1^2$$

c) Pda: $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j: j \equiv 0 \\ 0 < j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i: i \text{ divide a } j} a_{i,j}$

En efecto,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j: j \equiv 0 \\ 0 < j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j}$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{i,j}$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i: i \text{ divide a } j} a_{i,j}$$

Con $b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \equiv 0 \\ & \text{y } 0 < j \leq n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

notar que $j \equiv 0$

$$\Leftrightarrow j = iq, q \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow j \text{ es múltiplo de } i$$

$$\Leftrightarrow i \text{ divide a } j$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k \in \text{Pares}} (-1)^k k^2 + \sum_{k \in \text{Impares}} (-1)^k k^2$$

$$= \sum_{i=1}^n 4i^2 + \sum_{i=1}^n -4i^2 + 2i - 1$$

$$= \sum_{i=1}^n \cancel{4i^2} - \cancel{4i^2} + 2i - 1$$

$$= \sum_{i=1}^n 2i - 1 = \sum_{i=1}^n 2i - \sum_{i=1}^n 1$$

$$= \frac{2n(n+1)}{2} - n$$

$$= n(n+1) - n$$

$$= n(n+1-1)$$

$$= n^2$$